

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

SPIS TREŚCI

B. Konorski: Pole elektrostatyczne dwuprzewodowej linii przesyłowej . . .	609
J. S. Zieliński: Składowe symetryczne grupowe $N-n$ -fazowe . . .	665
A. Palczewski: Analiza elementarnych i złożonych układów impulsowania prądem stałym . . .	685
T. Zagajewski: Symetria elektryczna nieliniowych obwodów o budowie symetrycznej . . .	711
J. Kulikowski: O pewnym uogólnieniu kryterium „idealnego obserwatora“ . .	723
S. Sławiński: Synteza czwórników formujących impulsy na obciążeniu magnetrónowym . . .	729
K. Holeyko: Fizyczne podstawy pomiarów krótkich odległości geodezyjnych za pomocą przyrządów elektronicznych . . .	743
J. Groszkowski: Próznomierz ciepno-przewodnościowy o kompresji impulsowej	763
Sz. Firkowicz: Przyczynek do statystycznej analizy jakości lamp elektronowych	783
Komunikaty:	
R. Wadas: Monokryształy ferrytu itrowego i niklowego . . .	789
J. Sass: Badanie rentgenograficzne ferrytu itrowego o strukturze granatu . .	791

СОДЕРЖАНИЕ

Б. Конорски: Электростатическое поле двухпроводной трансляционной линии . . .	609
И. С. Зелински: $N-n$ -фазные групповые симметрические составляющие . . .	665
А. Пальчевски: Анализ элементарных и сложных схем импульсирования постоянным током	685
Т. Загаевски: Электрическая симметрия симметрично построенных нелинейных цепей . .	711
Я. Куликовски: Об одном обобщении критерия „идеального наблюдателя“ . . .	723
С. Славиньски: Синтез цепей, формирующих импульсы на магнетронной нагрузке . . .	729
К. Холейко: Физические основы измерения коротких геодезических расстояний с помощью электронных приборов . . .	743
Я. Грошковски: Вакуумметр сопротивления с импульсным сжатием . . .	763
Ш. Фиркович: К вопросу о статическом анализе качества электронных ламп . . .	783
Сообщения:	
Р. Вадас: Монокристаллы итриевого и никелевого феррита . . .	789
Г. Сасс: Рентгенографическое исследование итриевого феррита в структуре граната . .	791

CONTENTS — SOMMAIRE

B. Konorski: Das elektrostatische Feld einer Doppelleitung . . .	609
J. S. Zieliński: Symmetrical $N-n$ -phase group components . . .	665
A. Palczewski: Analysis of elementary and composite D. C. dialling circuits . .	685
T. Zagajewski: Electric symmetry of non-linear circuits with symmetrical structure . . .	711
J. Kulikowski: On some extension of the „ideal observer“ criterion . . .	723
S. Sławiński: The synthesis of pulse forming networks on the magnetron load . . .	729
A. Holeyko: The physical principles of the geodetic short distance measurements by means of the electronic devices . . .	743
J. Groszkowski: Pulse-compression thermal vacuum gauge . . .	763
Sz. Firkowicz: Contribution to the statistical analysis of the quality of electron tubes . . .	783
Communiquées:	
R. Wadas: Yttrium and nickel ferrite single crystals . . .	789
J. Sass: Roentgenographic investigation of the yttrium ferrite with grenade structure . . .	791

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X • ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

PRINTED IN POLAND

COPYRIGHT BY

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04 lub 8.87.40
Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Dział Czasopism
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 774+136 egz.	Do składania 8 VII 1961
Ark. wyd. 13,0, druk. 12	Podpisano do druku 25 X 1961
Papier ilustr. kl. V 70 g 70×100/16	Druk ukończ. w październiku 1961
Cena zł 30,—	E-5 Zamówienie 472/92

Drukarnia Uniwersytetu im. A. Mickiewicza — Poznań, ul. Fredry 10

621.319.7

B. KONORSKI

Das elektrostatische Feld einer Doppelleitung

Rękopis dostarczono 30. 12. 1960.

Die Zahl der gründlich untersuchten elektrostatischen Felder umfaßt nur wenige Posten: 1) das Feld einer Punktladung, einer geladenen Kugel, bezw. eines Ellipsoides; 2) das Feld einer Linienladung bezw. eines geladenen Kreis- oder elliptischen Zylinders; 3) das Feld zweier Punktladungen; 4) das Feld zweier parallelen Linienladungen bezw. zweier geraden Kreiszylinder mit parallelen Achsen. Von anderen Feldern ist uns nur wenig bekannt.

Der vorliegende Aufsatz hat den Zweck, diesem Verzeichnis noch einen Posten hinzuzufügen. Mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Methoden können wir analytisch die Punkte bestimmen, durch welche eine Feldlinie hindurchgeht, und auch die Winkel, welche die Tangenten der Feldlinien in diesen Punkten mit den waagrechten Geraden bilden. Außer dem bekannten Begriff des Gleichgewichtspunktes wurden noch andere Singulärelemente (Trennpunkt, Trenngerade) eingeführt, ihre Eigenschaften beschrieben und Methoden zu ihrer Lagebestimmung entwickelt.

Das Netz der Singulärlinien ermöglicht einen guten Ueberblick über den Verlauf der Feld- und Aequipotentiallinien.

1. FLUß EINER PUNKTLADUNG DURCH EINE STRECKE

a. Bestimmungen und Bezeichnungen

Nehmen wir an, daß eine geradlinige, unendlich lange geladene Leitung AB parallel zur Erdoberfläche aufgehängt wird; die Erdebene $Z-Z$ wird als Aequipotentialebene angenommen. Der Querschnitt der Leitung sei ein Kreis mit dem Radius r_0 und dem Mittelpunkt C . Wir erhalten hier ein ebenes elektrostatisches Feld und, falls r_0 im Verhältnis zum Abstand anderer von uns betrachteten Punkte von C sehr klein ist, können wir in der Ebene $\mu \perp AB$ die Leitung als *Punktladung* bezeichnen. Die Ladungsdichte der „*Linienladung*“ AB bezeichnen wir als „*Ladung*“ Q (Maß Asm^{-1}).

Das Rechteck mit den Seiten $P'P''$ und l , wobei die Punkte P' , P'' in μ liegen und $l = l_m$ parallel zu AB ($\perp$ zu μ), bezeichnen wir in dem

behandelten Feld als „Strecke $P'P''$ “. Die Koordinaten der Punkte C , P' , P'' seien: $C \equiv (c, h)$; $P' \equiv (\xi', \eta')$, $P'' \equiv (\xi'', \eta'')$, Bild 1.

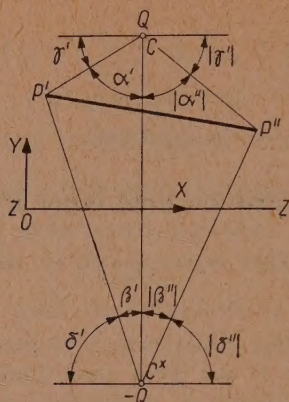


Bild 1. Der durch die Linienladung Q erzeugte, die Strecke $P'P''$ durchdringende Fluß.

Das ebene Feld der Leitung mit Ladung Q im Halbraum Ξ oberhalb $Z-Z$ ist in dem gleichen Raum einem Feld gleichwertig, das durch die Punktladungen Q und $-Q$, in den Punkten C und $C^* \equiv (c, -h)$ gelegen, erzeugt wird. Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha' &= \arctg \frac{c - \xi'}{h - \eta'}; & \beta' &= \arctg \frac{c - \xi'}{h + \eta'}; & \alpha'' &= \arctg \frac{c - \xi''}{h - \eta''}; & \beta'' &= \arctg \frac{c - \xi''}{h + \eta''}; \\ \gamma' &= \arctg \frac{h - \eta'}{c - \xi'}; & \delta' &= \arctg \frac{h + \eta'}{c - \xi'}; & \gamma'' &= \arctg \frac{h - \eta''}{c - \xi''}; & \delta'' &= \arctg \frac{h + \eta''}{c - \xi''}. \end{aligned} \quad (1)$$

Aus (1) folgt:

1. alle Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind $\leq 90^\circ$ und $\geq -90^\circ$;
2. $\alpha=0$ (bzw. $\beta=0$) für die lotrechte und $\gamma=0$ (bzw. $\delta=0$), für die waagerechte Gerade durch C (bzw. durch C^*), Bild 2.

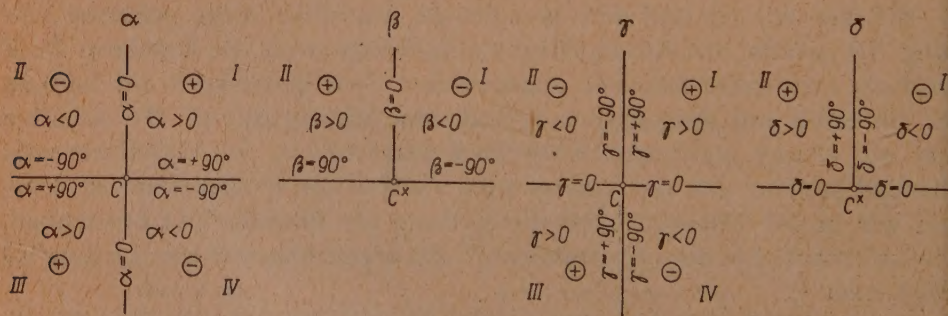


Bild 2. Vorzeichen der Winkel in Bild 1.

3. Liegen die Geraden CP bzw. C^*P in verschiedenen Vierteln I bis IV, so sind die Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positiv oder negativ gemäß Bild 2.
4. auf der durch C (bzw. C^*) hindurchgehenden Waagerechten können wir für α (bzw. β) die Werte $+90^\circ$ oder -90° annehmen, je nachdem, von welcher Seite sich der freie Schenkel dieser Waagerechten annähert; dasselbe gilt für die Lotrechte durch C, C^* und die Winkel γ, δ .
5. Zur eindeutigen Bestimmung von α und γ ist nicht nur die Angabe des Zahlenwertes und des Vorzeichens nötig, sondern auch die Feststellung, in welchem Quadranten sich der freie Schenkel befindet, z. B. $\gamma = -30^\circ$ (II) oder $\gamma = -30^\circ$ (IV).
6. Befindet sich P' in den Quadranten I oder III (bzw. in II oder IV), so gilt $\alpha' + \gamma' = 90^\circ$ (bzw. $= -90^\circ$)
- Befindet sich P' in dem Quadranten II (bzw. I), so gilt $\beta' + \delta' = 90^\circ$ (bzw. $= -90^\circ$)

Es sei ψ der von Q ($Q > 0$) erzeugte und die Strecke $P'P''$ durchsetzende Fluß. Das Vorzeichen von ψ setzen wir folgendermaßen fest: ist die Orientierung ζ der Feldlinien auf der Strecke $P'P''$ so beschaffen, daß ζ in Bezug auf P' einen Drehsinn gleich dem der Uhrzeiger besitzt, so wird ψ als positiv angenommen (im entgegengesetzten Falle ist ψ negativ) Bild 3. Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

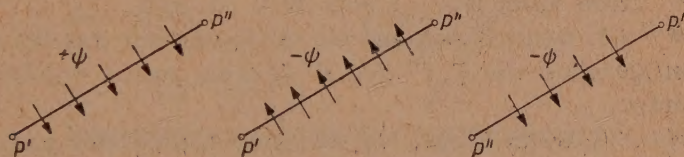


Bild 3. Vorzeichen des die Strecke $P'P''$ durchdringenden Flusses.

$$\psi_0 = \frac{2\pi\psi}{q}; \quad (3)$$

$$q = |Q|; \quad (4)$$

$$h^2 - \eta'^2 - (c - \xi')^2 = N'; \quad h^2 - \eta''^2 - (c - \xi'')^2 = N''; \quad (5)$$

$$(c - \xi') \frac{\eta'' - \eta'}{\xi'' - \xi'} = M'; \quad (c - \xi'') \frac{\eta'' - \eta'}{\xi'' - \xi'} = M'' . \quad (6)$$

b. Ausdrücke für ψ_0

Befindet sich in C eine positive Ladung Q , so gilt, wie leicht für verschiedene relative Lagen von C in Bezug auf die Strecke $P'P''$ zu erkennen ist:

$$\text{I. } \psi_0 = \alpha' + \beta' - \alpha'' - \beta'' + \pi W; \quad (7)$$

$$\text{II. } \psi_0 = -\gamma' - \delta' + \gamma'' + \delta'' + \pi W. \quad (8)$$

Selbstverständlich stellen I und II dieselbe Beziehung dar und man kann den einen Ausdruck in den anderen verwandeln; dabei ist zu beachten, daß z. B. für $\frac{c-\xi'}{h-\eta'} > 0$ (bezw. < 0) $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ (bezw. $\gamma' = -\frac{\pi}{2} - \alpha'$) ist, was zu verschiedenen Werten von W führt. Wir benützen nebeneinander beide Ausdrücke I, II, da in der Praxis bald der eine, bald der andere bequemer erscheint. Die Hauptsache dabei ist die Bestimmung des Wertes W .

Ausdruck I. W kann die Werte 1, 0, -1 annehmen.

1. Falls $\frac{h-\eta'}{\eta''-h} < 0$ und $\eta'' \neq h$ ist, so liegt C außerhalb des waagerechten Streifens, der von 2 Parallelen zu $Z-Z$, die durch P' und P'' hindurchgehen, gebildet wird. In diesem Falle ist $W=0$. Dasselbe gilt bei $\eta'=\eta''$ oder $P'P'' \perp ZZ$.

2. Ist $\frac{h-\eta'}{\eta''-h} > 0$ und $\eta'' \neq h$, wie auch $h-\eta' \neq M'$ (oder $h-\eta'' \neq M''$), so liegt C innerhalb des in 1. erwähnten Streifens und nicht auf der Geraden $P'P''$. Dabei kann $W=+1$ oder $W=-1$ sein.

Es ist $W=+1$, wenn C sich auf der Ausgangsseite des bei der vorliegenden Konfiguration von C , P' und P'' sich als positiv ergebenden Flusses ψ befindet.

Es ist $W=-1$, wenn C sich auf der Eintrittsseite des positiven Flusses ψ befindet.

3. Wenn $\frac{h-\eta'}{\eta''-h} > 0$, $\eta'' \neq h$, $c \neq \xi'$, $c \neq \xi''$ und $h-\eta' = M'$ (oder $h-\eta'' = M''$),

dh. wenn C sich innerhalb des in 1. erwähnten Streifens befindet und auf der Strecke $P'P''$ liegt, jedoch weder mit P' noch mit P'' identisch ist, so ist $W=0$ und $\alpha'' = \alpha'$.

4. Wenn $h \approx \eta'$ oder $h \approx \eta''$, wobei jedoch $c \neq \xi'$ bzw. $c \neq \xi''$, dh. wenn C in der Nähe der beiden Grenzgeraden des in 1. erwähnten Streifens liegt (wobei jedoch $C \neq P'$ und $C \neq P''$), so ist $W = \pm 1$ (wie oben in 2.), falls C innerhalb des Streifens liegt, oder $W=0$ (wie oben in 1.), falls C außerhalb des Streifens liegt. α' und α'' sind dann gleich 90° oder -90° . Ist jedoch $h = \eta'$ (bezw. $h = \eta''$), so können wir C als innerhalb oder auch als außerhalb des Streifens liegend betrachten; das Resultat der Rechnung nach Gl. (7) bleibt in beiden Fällen das gleiche.

5. Ist $h=\eta'$ und $c=\xi'$ oder $h=\eta''$ und $c=\xi''$, dh. ist $C\equiv P'$, bzw. $C\equiv P''$, so erhalten wir: $W=0$ und $a'=a''$.

Die Angaben, die in 1. bis 5. enthalten sind, sind graphisch in Bild 4a, b dargestellt; die Neigung der Geraden $P' P''$ gegen $Z-Z$ (Bild 5;

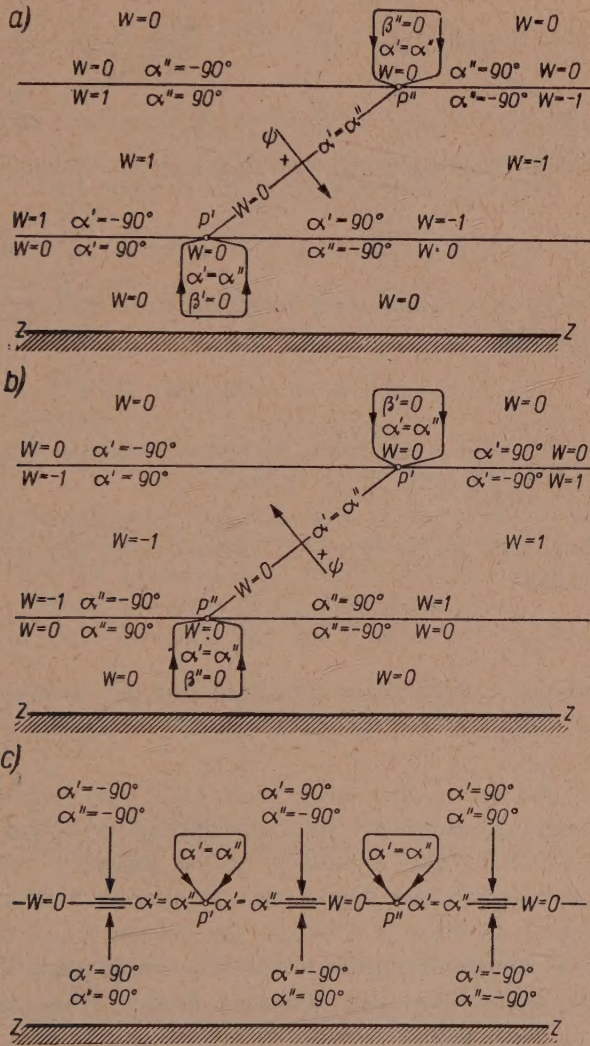


Bild 4. Werte W in Gleichung I (7) bei verschiedenen Lagen der Punktladung.

$\eta' \neq \eta''$) spielt dabei keine Rolle und hat keinen Einfluß auf den Wert W . Der Fall $\eta' = \eta''$ ist in Bild 4c dargestellt.
Ausdruck II. W kann die Werte 2, 1, 0, -1, -2 annehmen.

1. Falls $\frac{c-\xi'}{\xi''-c} < 0$ und $\xi'' \neq c$, so liegt C außerhalb des lotrechten Streifens, der von 2 parallelen Geraden, die durch P' und P'' hindurchgehen und zu $Z-Z$ senkrecht sind, gebildet wird; es ist dann $W=0$. Dies gilt auch für den Fall $\xi'=\xi''$, wobei $P'P'' \perp Z-Z$ ist.

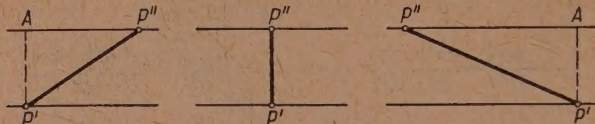
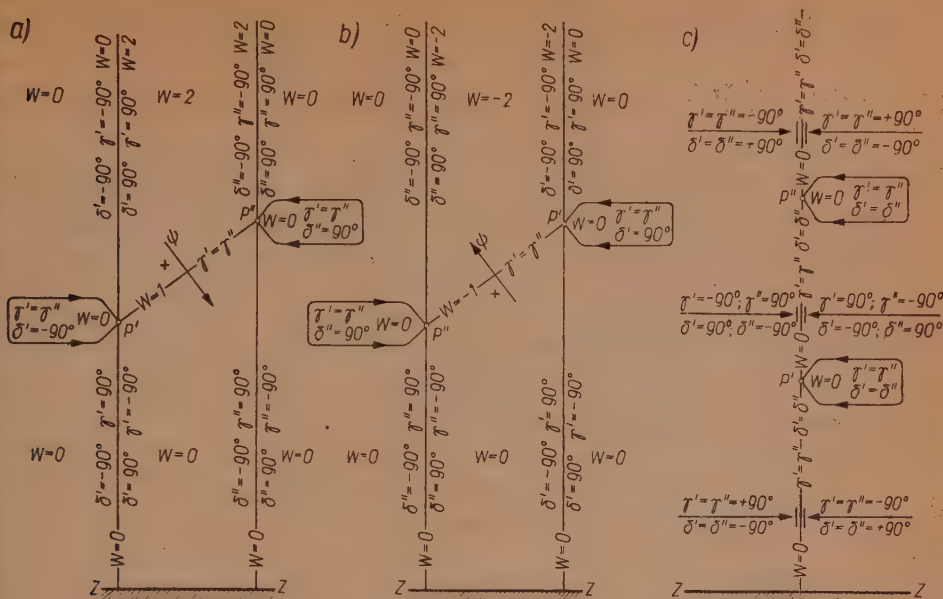


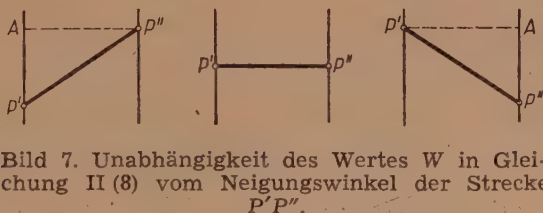
Bild 5. Unabhängigkeit des Wertes W in Gleichung I (7) vom Neigungswinkel der Strecke $P'P''$.

2. Falls $\frac{c-\xi'}{\xi''-c} > 0$; $\xi'' \neq c$ und $h-\eta' < M'$ (oder $h-\eta'' < M''$) ist, so liegt C innerhalb des in 1. erwähnten Streifens unterhalb der Strecke $P'P''$. Es ist dann $W=0$.
3. Falls $\frac{c-\xi'}{\xi''-c} > 0$; $\xi'' \neq c$ und $h-\eta' > M'$ (oder $h-\eta'' > M''$) ist, so liegt C innerhalb des in 1. erwähnten Streifens oberhalb der Strecke $P'P''$. Dabei kann $W=+2$ oder $W=-2$ sein.
- Es ist $W=+2$, wenn C sich auf der Ausgangsseite des positiven Flusses ψ befindet; es ist $W=-2$, wenn C sich auf der Eintrittsseite von ψ befindet.
4. Ist $\frac{c-\xi'}{\xi''-c} > 0$, $\xi'' \neq c$ und $h-\eta'=M'$ (oder $h-\eta''=M''$), so liegt C innerhalb des in 1. erwähnten Streifens auf der Strecke $P'P''$, wobei aber $C \neq P'$ und $C \neq P''$. Es ist dann $W=1$ für $\xi' < \xi''$ und $W=-1$ für $\xi' > \xi''$.
5. Wenn $c \approx \xi'$ und $h \neq \eta'$ oder $c \approx \xi''$ und $h \neq \eta''$, so liegt C in der Nähe der beiden Grenzgeraden des in 1. erwähnten Streifens (wobei jedoch $C \neq P'$ und $C \neq P''$). Die Winkel γ' und δ' (bzw. γ'' und δ'') betragen dann 90° oder -90° ; die Werte von W sind 0, 2 oder -2 , je nachdem der Fall 1, 2, oder 3 vorliegt. Ist jedoch $c=\xi'$ (oder $c=\xi''$), so können wir C sowohl als innerhalb wie auch als außerhalb des Streifens liegend betrachten; das Resultat beider Annahmen bleibt das gleiche.
6. Ist $h=\eta'$ und $c=\xi'$ oder $h=\eta''$ und $c=\xi''$, d.h. ist $C \equiv P'$ oder $C \equiv P''$, so erhalten wir $W=0$ und $\gamma'=\gamma''$. Die Winkel δ', δ'' sind dabei gleich 90° oder -90° .

Die Angaben von 1. bis 6. sind in Bild 6a, b dargestellt; die Neigung der Geraden $P'P''$ gegen $Z-Z$ (Bild 7; $\xi' \neq \xi''$) ist dabei belanglos. Der Fall $\xi'=\xi''$ ist in Bild 6c dargestellt.

Bild 6. Werte W in Gleichung II (8) bei verschiedenen Lagen der Punktladung Q .

In den vorliegenden Betrachtungen wie auch in Bild 4 und 6 wurde angenommen, daß die Ladung in C positiv ist; ist diese Ladung negativ, so ändern alle Glieder in (7) und (8) ihre Vorzeichen.

Bild 7. Unabhängigkeit des Wertes W in Gleichung II (8) vom Neigungswinkel der Strecke $P'P''$.

c. Anwendung von (7) und (8) bei Berechnungen in der Praxis

Durch jeweilige Anwendung der Ausdrücke (7) oder (8) kann man erreichen, daß für alle Lagen von C (mit Ausnahme der Lage im Dreieck $P'P''A$ Bild 5 und 7) der Wert von W gleich Null wird, was bei praktischen Rechnungen am bequemsten ist. Die Ausdrücke I, II können wir auch in folgender Form schreiben:

$$I \quad \psi_0 = \arctg \frac{c - \xi'}{h - \eta'} + \arctg \frac{c - \xi'}{h + \eta'} - \arctg \frac{c - \xi''}{h - \eta''} - \arctg \frac{c - \xi''}{h + \eta''} + \pi W_I; \quad (9)$$

$$\text{II} \quad \psi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{h-\eta'}{c-\xi'} - \operatorname{arctg} \frac{h+\eta'}{c-\xi'} + \operatorname{arctg} \frac{h-\eta''}{c-\xi''} + \operatorname{arctg} \frac{h+\eta''}{c-\xi''} + \pi W_{\text{II}}; \quad (10)$$

$$\psi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2h(c-\xi')}{N'} - \operatorname{arctg} \frac{2h(c-\xi'')}{N''} + \pi(W+Z'-Z''). \quad (11)$$

Die Summe $(W+Z'-Z'')$ ist unabhängig davon, ob Gl. I oder Gl. II verwendet wurde; es können aber in diesen beiden Fällen einzelne Glieder verschiedene Werte besitzen. W_I und W_{II} berechnet man nach Pkt. 1b /I bzw. /II oder mittels Bild 4 bzw. 6. Z' und Z'' in (11) sind Abkürzungen für $Z' \left(\frac{c-\xi'}{h-\eta'} \right)$ bzw. $Z'' \left(\frac{c-\xi''}{h-\eta''} \right)$; sie können die Werte 0, 1 oder -1 annehmen. Zwecks Berechnung von Z' , Z'' erinnern wir an einige elementare Identitäten

$$S' = \operatorname{arctg} \frac{A}{h-\eta} + \operatorname{arctg} \frac{A}{h+\eta} = \operatorname{arctg} \frac{2hA}{N} + \pi Z', \quad (12)$$

wobei

$$N = h^2 - A^2 - \eta^2; \quad Z' = Z' \left(\frac{A}{h-\eta} \right); \quad h > 0; \quad \eta > 0; \quad h \neq \eta; \quad A > 0. \quad (13)$$

$$\text{Falls } \frac{A^2}{h^2 - \eta^2} < 1 \text{ ————— so ist } Z' = 0;$$

$$\frac{A^2}{h^2 - \eta^2} > 1 \text{ und } \frac{A}{h-\eta} > 0 \text{ (bzw. } < 0 \text{), so ist } Z' = 1 \text{ (bzw. } = -1 \text{);} \quad (14)$$

$$\frac{A^2}{h^2 - \eta^2} = 1 \text{ und } A > 0 \text{ (bzw. } < 0 \text{), so ist } S' = \frac{\pi}{2} \left(\text{bzw. } = -\frac{\pi}{2} \right).$$

$$S'' = \operatorname{arctg} \frac{h-\eta}{A} + \operatorname{arctg} \frac{h+\eta}{A} = -\operatorname{arctg} \frac{2hA}{N} + \pi Z'', \quad (15)$$

wobei

$$N = h^2 - A^2 - \eta^2; \quad Z'' = Z'' \left(\frac{h-\eta}{A} \right); \quad h > 0; \quad \eta > 0; \quad h \neq \eta; \quad A > 0. \quad (16)$$

$$\text{Falls } \frac{h^2 - \eta^2}{A^2} < 1 \text{ oder } N < 0 \dots \text{ so ist } Z'' = 0;$$

$$\frac{h^2 - \eta^2}{A^2} > 1 \text{ oder } N > 0 \text{ und } \frac{h-\eta}{A} > 0 \text{ (bzw. } < 0 \text{), so ist } Z'' = 1 \text{ (bzw. } = -1 \text{).} \quad (17)$$

$$\frac{h^2 - \eta^2}{A^2} = 1 \text{ oder } N = 0 \text{ und } \frac{h-\eta}{A} > 0 \text{ (bzw. } < 0 \text{), so ist } S'' = \frac{\pi}{2} \left(\text{bzw. } = -\frac{\pi}{2} \right).$$

$$\operatorname{arctg} B = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{B} \left(\text{bzw. } = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{B} \right) \text{ wenn } B > 0 \text{ (bzw. } < 0 \text{).} \quad (18)$$

2. ANWENDUNGEN ZUR FORMBESTIMMUNG DER FELDLINIEN IM FELDE ZWEIER PUNKTLADUNGEN

a. Allgemeine Gleichungen

Falls 2 Punkte $P' \equiv (\xi', \eta')$ und $P'' \equiv (\xi'', \eta'')$ auf einer Feldlinie liegen, so ist der die Strecke $P'P''$ durchsetzende Fluß ψ gleich Null und folglich

$$\psi_0 = 0 \quad (19)$$

(s. Pkt. 5). Wird einer dieser Punkte, z. B. Punkt P'' als fest angenommen, so können wir unter gewissen Beschränkungen (s. Pkt. 5) (19) als die Gleichung einer durch P'' hindurchgehenden Feldlinie betrachten. Wenn nur eine zur Erdoberfläche parallele Linienladung vorhanden ist, so erhält man aus (19) einen durch P' und P'' hindurchgehenden Kreis; (am bequemsten setzt man dabei $c=0$; $\eta''=0$); für den Fall zweier Punktladungen ist aber die direkte allgemeine Verwendung von (19) zu kompliziert.

Wir können jedoch (9), (10) und (19) [bezw. (11) und (19)] dazu verwenden, gewisse charakteristische Punkte zu bestimmen, die auf einer Feldlinie liegen und so den angenäherten Verlauf dieser Linie festsetzen. Befinden sich die Punktladungen Q_1, Q_2 in den Punkten $C_1 \equiv (c_1, h_1)$; $C_2 \equiv (c_2, h_2)$, so lautet die Gleichung der Feldlinie

$$I. Q_1(a'_1 + \beta'_1 - a''_1 - \beta''_1 + \pi W_1) + Q_2(a'_2 + \beta'_2 - a''_2 - \beta''_2 + \pi W_2) = 0, \quad (20)$$

oder

$$II. Q_1(-\gamma'_1 - \delta'_1 + \gamma''_1 + \delta''_1 + \pi W_1) + Q_2(-\gamma'_2 - \delta'_2 + \gamma''_2 + \delta''_2 + \pi W_2) = 0, \quad (21)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi'}{h_1 - \eta'}; & a''_1 &= \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi''}{h_1 - \eta''}; & a'_2 &= \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi'}{h_2 - \eta'}; & a''_2 &= \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi''}{h_2 - \eta''}; \\ \beta'_1 &= \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi'}{h_1 + \eta'}; & \beta''_1 &= \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi''}{h_1 + \eta''}; & \beta'_2 &= \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi'}{h_2 + \eta'}; & \beta''_2 &= \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi''}{h_2 + \eta''}; \\ \gamma'_1 &= \operatorname{arctg} \frac{h_1 - \eta'}{c_1 - \xi'}; & \gamma''_1 &= \operatorname{arctg} \frac{h_1 - \eta''}{c_1 - \xi''}; & \gamma'_2 &= \operatorname{arctg} \frac{h_2 - \eta'}{c_2 - \xi'}; & \gamma''_2 &= \operatorname{arctg} \frac{h_2 - \eta''}{c_2 - \xi''}; \\ \delta'_1 &= \operatorname{arctg} \frac{h_1 + \eta'}{c_1 - \xi'}; & \delta''_1 &= \operatorname{arctg} \frac{h_1 + \eta''}{c_1 - \xi''}; & \delta'_2 &= \operatorname{arctg} \frac{h_2 + \eta'}{c_2 - \xi'}; & \delta''_2 &= \operatorname{arctg} \frac{h_2 + \eta''}{c_2 - \xi''}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Lage der auf derselben Feldlinie liegenden Punkte P' und P'' ist meistens soweit bekannt, daß man daraus die in (20) und (21) vorkommenden Werte W bestimmen kann.

b. Grundaufgaben

Mit Hilfe von (20) bzw. (21) können wir folgende Aufgaben A, B, C lösen:

- A. (Aufgabe *Punkt — Punkt*). Gegeben ist der Punkt P'' . Es ist die Ordinate (bzw. die Abszisse) eines Punktes P' zu bestimmen, der auf einer durch P'' hindurchgehenden Feldlinie liegt, wobei die Abszisse (bzw. die Ordinate) von P' gegeben ist.
- B. (Aufgabe *Punkt — Winkel*). Es ist der Winkel zu bestimmen, der in Punkt C (oder C^*) von der Waagerechten und derjenigen Feldlinie gebildet wird, die durch einen gegebenen Punkt P'' hindurchgeht.
- C. (Aufgabe *Winkel — Winkel*). Es ist der Winkel γ'_1 (bzw. α'_1) zu bestimmen, der von der Waagerechten (bzw. der Lotrechten) und der Feldlinie im Punkt C_1 gebildet wird, falls der entsprechende Winkel γ'_2 (bzw. α'_2) gegeben ist, der mit Hilfe derselben Feldlinie im Punkt C_2 gebildet wird.

Diese Aufgaben führen zu den Gleichungen (24) — (58), die jedoch den Charakter von notwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingungen aufweisen, so daß sie keineswegs ohne vorherige Untersuchung ihrer Zulässigkeit benützt werden können. Man kann nämlich leicht 2 Punkte im Feld finden, deren Koordinaten den Gleichungen (20) oder (21) genügen, trotzdem sie nicht auf derselben Feldlinie liegen. So ist z.B. für den Fall, der weiter unten im Beispiel 5 (Pkt. 7a) behandelt wird, der Fluß durch die Strecke $P'P''$ mit $P' \equiv (-1000; 0)$, $P'' \equiv (278,3; 0)$ gleich Null; nun liegen aber P' und P'' nicht auf derselben Feldlinie, was schon daraus ersichtlich ist, daß beide auf der Erdoberfläche d.h. auf einer Aequipotentialebene liegen. Ein ebenso falsches Resultat würde man erhalten, wenn man z.B. die Gleichungen in (C) auf eine Feldlinie anwenden würde, die gar nicht zwischen C_1 und C_2 , sondern etwa zwischen C_1 und der Erdoberfläche verläuft. In Pkt. 5 werden wir erklären, wie die obenerwähnte Untersuchung durchzuführen ist.

Ebenso wie in [1] bezeichnen wir

$$\kappa_{12} = \frac{Q_1}{Q_2} \quad \text{und} \quad k = -\kappa_{12}. \quad (23)$$

A. *Punkt — Punkt*.

- A. 1. Gegeben ist $P'' \equiv (\xi'', \eta'')$ und die Abszisse ξ' von P' ; zu berechnen ist die Ordinate η' von P' . Mit Hilfe von I berechnen wir aus (22) $\alpha''_1, \beta''_1, \alpha''_2, \beta''_2$ und erhalten

$$\begin{aligned} k \left(\arctg \frac{c_1 - \xi'}{h_1 - \eta'} + \arctg \frac{c_1 - \xi'}{h_1 + \eta'} - \alpha''_1 - \beta''_1 + \pi W_1 \right) = \\ = \arctg \frac{c_2 - \xi'}{h_2 - \eta'} + \arctg \frac{c_2 - \xi'}{h_2 + \eta'} - \alpha''_2 - \beta''_2 + \pi W_2 \end{aligned} \quad (24)$$

oder

$$k \left[\operatorname{arctg} \frac{2h_1(c_1 - \xi')}{h_1^2 - \eta'^2 - (c_1 - \xi')^2} + \pi Z_1 \left(\frac{c_1 - \xi'}{h_1 - \eta'} \right) \right] - \operatorname{arctg} \frac{2h_2(c_2 - \xi')}{h_2^2 - \eta'^2 - (c_2 - \xi')^2} - \pi Z_2 \left(\frac{c_2 - \xi'}{h_2 - \eta'} \right) = k(\alpha_1'' + \beta_1'' - \pi W_1) - \alpha_2'' - \beta_2'' + \pi W_2. \quad (25)$$

Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

$$k \left[\alpha_1'' + \beta_1'' - \pi W_1 - \pi Z_1 \left(\frac{c_1 - \xi'}{h_1 - \eta'} \right) \right] - \alpha_2'' - \beta_2'' + \pi W_2 + \pi Z_2 \left(\frac{c_2 - \xi'}{h_2 - \eta'} \right) = \tau. \quad (26)$$

Dann ist
$$k \operatorname{arctg} \frac{2h_1(c_1 - \xi')}{h_1^2 - \eta'^2 - (c_1 - \xi')^2} - \operatorname{arctg} \frac{2h_2(c_2 - \xi')}{h_2^2 - \eta'^2 - (c_2 - \xi')^2} = \tau \quad (27)$$

und mit
$$\zeta = \frac{h_2^2 - \eta'^2 - (c_2 - \xi')^2}{2h_2(c_2 - \xi')}; \quad \chi_{21} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{\chi_{12}}; \quad (28)$$

$$a = \frac{h_1^2 - h_2^2 + c_{21}(c_1 + c_2 - 2\xi')}{2h_1(c_1 - \xi')}; \quad b = \chi_{21} \frac{c_2 - \xi'}{c_1 - \xi'} \quad (29)$$

erhalten wir

$$\frac{h_1^2 - \eta'^2 - (c_1 - \xi')^2}{2h_1(c_1 - \xi')} = a + b\zeta. \quad (30)$$

Die Gl. (27) nimmt jetzt folgende Form an:

$$k \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (a + b\zeta) - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \zeta = \tau. \quad (31)$$

Aus dieser läßt sich mittels sukzessiver Proben ζ berechnen. Es ist dann

$$\eta' = \sqrt{h_2^2 - (c_2 - \xi')^2 - 2h_2(c_2 - \xi')\zeta}. \quad (32)$$

In (24) sind die Zahlen Z_1 , Z_2 enthalten, die vom Wert der vorerst noch unbekannten Größe η' abhängen. Meistens ist jedoch η' aus dem angenäherten Feldbild soweit bekannt, daß sich Z_1 , Z_2 aus (14) und (17) daraus berechnen lassen. Ist dies nicht möglich, so muß man einen ungefähren Wert von η' annehmen und nach der durchgeführten Rechnung die Richtigkeit der Annahme prüfen. Dasselbe Verfahren benützen wir in den weiter unten folgenden Berechnungen.

Wollen wir die Gl. II(21) benützen, so berechnen wir aus (22) γ_1'' , δ_1' , γ_2'' , δ_2'' und finden

$$k \left(-\operatorname{arctg} \frac{h_1 - \eta'}{c_1 - \xi'} - \operatorname{arctg} \frac{h_1 + \eta'}{c_1 - \xi'} + \gamma_1'' + \delta_1'' + \pi W_1 \right) = -\operatorname{arctg} \frac{h_2 - \eta'}{c_2 - \xi'} - \operatorname{arctg} \frac{h_2 + \eta'}{c_2 - \xi'} + \gamma_2'' + \delta_2'' + \pi W_2 \quad (33)$$

oder

$$k = \left[\operatorname{arctg} \frac{2h_1(c_1 - \xi')}{h_1^2 - \eta'^2 - (c_1 - \xi')^2} - \pi Z_1 \left(\frac{h_1 - \eta'}{c_1 - \xi'} \right) \right] - \operatorname{arctg} \frac{2h_2(c_2 - \xi')}{h_2^2 - \eta'^2 - (c_2 - \xi')^2} + \pi Z_2 \left(\frac{h_2 - \eta'}{c_2 - \xi'} \right) = \gamma_2'' + \delta_2'' + \pi W_2 - k(\gamma_1'' + \delta_1'' + \pi W_1). \quad (34)$$

Mit

$$\gamma_2'' + \delta_2'' + \pi W_2 - k(\gamma_1'' + \delta_1'' + \pi W_1) + k\pi Z_1 \left(\frac{h_1 - \eta'}{c_1 - \xi'} \right) - \pi Z_2 \left(\frac{h_2 - \eta'}{c_2 - \xi'} \right) = \tau \quad (35)$$

erhalten wir schließlich dieselbe Gl. (27).

*

Sind in der Aufgabe *Punkt — Punkt* die Größen ξ'' , η'' , η' gegeben und wird ξ' gesucht, so ist die Lösung im allgemeinen Falle viel umständlicher.

Spezialfälle

A. 2. Wir vermeiden die umständliche Lösung der trigonometrischen Gleichung (31) in A1, wenn wir die Schnittpunkte der Feldlinie mit den Geraden $\xi' = c_1$ oder $\xi' = c_2$ finden wollen. Für $\xi' = c_1$ erhalten wir aus (27)

$$\operatorname{arctg} \frac{2h_2 c_{21}}{h_2^2 - \eta'^2 - c_{21}^2} = \tau = \alpha_2'' + \beta_2'' - \pi W_2 - \pi Z_2 \left(\frac{c_2 - \xi'}{h_2 - \eta'} \right) - k(\alpha_1'' + \beta_1'' - \pi W_1) \quad (36)$$

hieraus folgt

$$\eta' = \sqrt{h_2^2 - c_{21}^2 - 2h_2 c_{21} \operatorname{ctg} \tau} \quad (37)$$

Für den Fall $\xi = c_2$ gilt

$$\tau = \alpha_1'' + \beta_1'' - \pi W_1 - \frac{1}{k}(\alpha_2'' + \beta_2'' - \pi W_2) + \pi Z_1 \left(\frac{c_1 - \xi'}{h_1 - \eta'} \right), \quad (38)$$

$$\eta' = \sqrt{h_1^2 - c_{21}^2 + 2h_1 c_{21} \operatorname{cotg} \tau}.$$

Ähnliche Ausdrücke für τ finden wir bei Benutzung von II (21).

A. 3. Von den vielen bestehenden Möglichkeiten führen wir hier den oft vorkommenden Fall an, daß ξ'' , η'' und $\eta' = 0$ gegeben sind und ξ' gesucht wird. Aus (24) folgt

$$k \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi'}{h_1} - \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi'}{h_2} = \frac{k}{2}(\alpha_1'' + \beta_1'' - \pi W_1) - \frac{1}{2}(\alpha_2'' + \beta_2'' - \pi W_2)$$

und mit

$$\xi = \frac{c_2 - \xi'}{h_2}; \quad \tau = \frac{k}{2}(\alpha_1'' + \beta_1'' - \pi W_1) - \frac{1}{2}(\alpha_2'' + \beta_2'' - \pi W_2) \quad (39)$$

erhalten wir

$$k \operatorname{arctg} \left(\frac{c_{12}}{h_1} + \chi_{21} \zeta \right) - \operatorname{arctg} \zeta = \tau; \quad \xi' = c_2 - h_2 \zeta. \quad (40)$$

B. Punkt — Winkel.

B. 1. Gegeben sind die Koordinaten ξ', η' von P' ; gesucht wird der Winkel α_2'' (bzw. γ_2''), der in der Punktquelle C_2 von der Lotrechten (bzw. der Waagerechten) und derjenigen Feldlinie gebildet wird, die durch P' hindurchgeht.

Als Koordinaten von P'' nehmen wir $\xi'' = c_2 + \Delta\xi$, $\eta'' = h_2 + \Delta\eta$ an; zur Grenze $\Delta\xi \rightarrow 0$ übergehend erhalten wir

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{-\Delta\xi}{-\Delta\eta} = \operatorname{tg} \alpha_2''; \quad \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{-\Delta\eta}{-\Delta\xi} = \operatorname{tg} \gamma_2''.$$

Aus (24) bzw. aus (33) folgt

$$\alpha_2'' = -k \left(\alpha_1' + \beta_1' - \operatorname{arctg} \frac{c_{12}}{h_1 + h_2} - \alpha_1'' + \pi W_1 \right) + \alpha_2' + \beta_2' + \pi W_2; \quad (41)$$

$$\gamma_2'' + \delta_2'' = k (-\gamma_1' - \delta_1' + \gamma_1'' + \delta_1'' + \pi W_1) + \gamma_2' + \delta_2' - \pi W_2. \quad (42)$$

Falls $h_1 \neq h_2$, so ist

$$\alpha_1'' = \operatorname{arctg} \frac{c_{12}}{h_1 - h_2}. \quad (43)$$

Ist $c_{12} \neq 0$, so ist

$$\gamma_1'' = \operatorname{arctg} \frac{h_1 - h_2}{c_{12}}; \quad \delta_1'' = \operatorname{arctg} \frac{h_1 + h_2}{c_{12}}. \quad (44)$$

Wenn $h_1 = h_2$ oder wenn $c_{12} = 0$, so sind die Winkel α_1'' , γ_1'' , δ_1'' gleich $\pm 90^\circ$. Die Werte dieser Winkel bestimmen wir aus Bild 4 bzw. 6.

B. 2. Für den Fall, daß P'' sich dem Punkte C_1 nähert ($\xi'' = c_1 + \Delta\xi$; $\eta'' = h_1 + \Delta\eta$) und daß die Winkel $\alpha_1'' = \operatorname{arctg} \frac{-\Delta\xi}{-\Delta\eta}$; $\gamma_1'' = \operatorname{arctg} \frac{-\Delta\eta}{-\Delta\xi}$ gesucht

werden, erhalten wir ähnliche Gleichungen

$$\alpha_1'' = \alpha_1' + \beta_1' + \pi W_1 - \frac{1}{k} \left(\alpha_2' + \beta_2' - \alpha_2'' - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_1 + h_2} + \pi W_2 \right) \quad (45)$$

$$\gamma_1'' + \delta_1'' = \gamma_1' + \delta_1' - \pi W_1 + \frac{1}{k} (-\gamma_2' - \delta_2' + \gamma_2'' + \delta_2'' + \pi W_2). \quad (46)$$

Für $h_1 \neq h_2$ ist

$$\alpha_2'' = \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 - h_1}; \quad (47)$$

Für $c_{12} \neq 0$ ist

$$\gamma_2'' = \operatorname{arctg} \frac{h_2 - h_1}{c_{21}}; \quad \delta_2'' = \operatorname{arctg} \frac{h_2 + h_1}{c_{21}}. \quad (48)$$

Für $h_1 = h_2$ oder $c_{12} = 0$ bestimmen wir die Winkel α''_2 , γ''_2 , δ''_2 aus Bild 4 oder 6.

B. 3. Die umgekehrte Aufgabe besteht darin, daß einer der Winkel α''_2 , γ''_2 , α''_1 , γ''_1 gegeben ist, der in einem der Quellpunkte von der Waagerechten — bzw. von der Lotrechten — und der Feldlinie gebildet wird; auch die Abszisse ξ' eines Punktes P' der Feldlinie ist gegeben. Gesucht wird die Ordinate η' von P' (der Fall, daß η' gegeben und ξ' gesucht wird, führt zu ziemlich umständlichen Rechnungen, und wird hier nicht behandelt). Nehmen wir z. B. an, daß α''_2 und ξ' gegeben sind; den Wert η' findet man aus (24) in ähnlicher Weise wie in A1. In diesem Falle ist

$$\beta''_1 = \operatorname{arctg} \frac{c_{12}}{h_1 + h_2} \text{ und (bei } h_1 \neq h_2) \alpha''_1 = \operatorname{arctg} \frac{c_{12}}{h_1 - h_2}.$$

Spezialfälle. Gesucht wird der Winkel in C_1 oder C_2

B. 4. Feldlinien, die vom Quellpunkt zur Erdoberfläche verlaufen. Bei $P'' \equiv C_2$ wenden wir wie vorhin (41) und (42) an; bei $P'' \equiv C_1$ dagegen (45) und (46). Dabei ist jetzt $\alpha'_1 = \beta'_1$ und $\gamma'_1 = \delta'_1$.

B. 5. Gegeben ist der Winkel α''_2 . Bei der Annahme, daß die Feldlinie zum Punkt P' der Erdoberfläche verläuft ($\eta' = 0$) läßt sich die Abszisse ξ' mittels (41) bis (44) bestimmen.

B. 6. Gegeben ist der Winkel α''_2 . Die Ordinate η' des Schnittpunktes der Feldlinie mit $\xi' = 0$ wird mittels

$$\operatorname{arctg} \frac{2h_2c_2}{h_2^2 - \eta'^2 - c_2^2} + \pi Z \left(\frac{c_2}{h_2 - \eta'} \right) - k \operatorname{arctg} \frac{2h_1c_1}{h_1^2 - \eta'^2 - c_1^2} - kZ \left(\frac{c_1}{h_1 - \eta'} \right) = \tau \quad (49)$$

bestimmt, wobei

$$\tau = k \left(\pi W_1 - \alpha''_1 + \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_1 + h_2} \right) + \alpha''_2 - \pi W_2. \quad (50)$$

Im allgemeinen Falle ist die Berechnung von η' aus (49) umständlich; sie vereinfacht sich im Spezialfall $h_1 = h_2 = h$; $c_1 = -c_2$. Wir erhalten dann

$$\eta' = \sqrt{h^2 - c_2^2 - 2hc_2 \operatorname{ctg} v}, \quad (51)$$

wobei

$$v = \lambda + \mu - \pi Z \left(\frac{c_2}{h - \eta'} \right); \quad \mu = \frac{\alpha''_2}{1 + k}; \quad (52)$$

$$\lambda = \frac{k}{1 + k} \left(\pi W_1 - \alpha''_1 + \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{2h} \right) - \frac{\pi}{1 + k} W_2.$$

Die Berechnung der Ordinate η' des Schnittpunktes der Feldlinie mit den Geraden $\xi=c_2$ oder $\xi=c_1$ ist (für $h_1 \neq h_2$) ebenfalls sehr einfach; ist z. B. der Winkel α_2'' gegeben, so benützen wir (36) bis (38).

B. 7. Der Winkel im Quellpunkt, gebildet von der Feldlinie, die zur ∞ verläuft. Wir setzen in (46) und (42) $\xi'=\infty$ und erhalten

a) $P'' \equiv c_1$:

$$\gamma_1'' + \delta_1'' = -\pi W_1 + \frac{1}{k} \left(\operatorname{arctg} \frac{h_2 - h_1}{c_{21}} + \operatorname{arctg} \frac{h_2 + h_1}{c_{21}} + \pi W_2 \right); \quad (53)$$

b) $P'' \equiv c_2$:

$$\gamma_2'' + \delta_2'' = k \left(\operatorname{arctg} \frac{h_1 - h_2}{c_{12}} + \operatorname{arctg} \frac{h_1 + h_2}{c_{12}} + \pi W_1 \right) - \pi W_2. \quad (54)$$

Dabei wurde $c_{12} \neq 0$ angenommen; wenn $c_{12}=0$, benützen wir (45) und (41).

C. Winkel — Winkel.

C. 1. Gegeben ist der Winkel α_1' (bezw. γ_1'); der Winkel α_2'' (bezw. γ_2'') ist zu berechnen.

Wir setzen $\xi' = c_1 + \Delta\xi'$; $\eta' = h_1 + \Delta\eta'$; $\xi'' = c_2 + \Delta\xi''$; $\eta'' = h_2 + \Delta\eta''$ und gehen ähnlich wie in B zur Grenze $\Delta\xi' \rightarrow 0$, $\Delta\xi'' \rightarrow 0$ über. Auf diese Weise erhalten wir die gesuchten Beziehungen

$$k\alpha_1' + \alpha_2'' = (k+1) \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 - h_1} + (1-k) \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 + h_1} + \pi(W_2 - kW_1); \quad (55)$$

$$k\gamma_1' + \gamma_2'' = (k+1) \operatorname{arctg} \frac{h_2 - h_1}{c_{21}} + (1-k) \operatorname{arctg} \frac{h_2 + h_1}{c_{21}} + \pi(kW_1 - W_2) - k\delta_1' - \delta_2''; \quad (56)$$

δ_1' und δ_2'' bestimmen wir aus Bild 6. Wenn $h_1 = h_2$ oder wenn $c_{21}=0$, benützen wir die Beziehungen

$$(k+1) \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 - h_1} = k\alpha_1'' + \alpha_2'; \quad (k+1) \operatorname{arctg} \frac{h_2 - h_1}{c_{21}} = k\gamma_1' + \gamma_2'$$

und bestimmen die Winkel mittels Bild 4 oder 6.

C. 2. Der Fluß ψ , der im Quellpunkt einem Zentralwinkel ϱ entspricht, ist

$$\psi = \varrho \frac{Q}{2\pi}. \quad (57)$$

Betrachten wir 2 Feldlinien m und n , die von Q_1 zu Q_2 verlaufen. Die von m (bezw. n) mit der Lotrechten in Q_1 und Q_2 gebildeten Winkel seien α_{11}' , α_{21}'' , (bezw. α_{12}' , α_{22}''), wobei (Bild 8)

$$\alpha_{12}' - \alpha_{11}' = \varrho_1; \quad \alpha_{22}'' - \alpha_{21}'' = \varrho_2;$$

ist ψ der Fluß der Röhre mn , so ist

$$\frac{Q_1 Q_1}{2\pi} = \frac{Q_2 Q_2}{2\pi} = \psi \quad (58)$$

Dieselbe Beziehung folgt aus (55); die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Konstante; wenn wir also (55) auf die Linien m und n

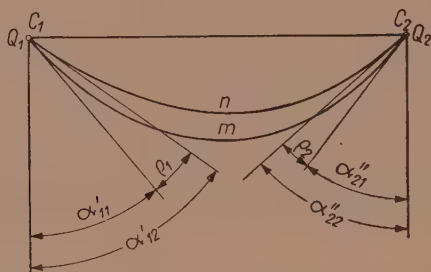


Bild 8. Die von den Feldlinien m , n mit den Lotrechten in den Punkten C_1 und C_2 gebildeten Winkel.

anwenden, so erhalten wir $ka'_{11} + a'_{21} = ka'_{12} + a'_{22}$ oder $k(a'_{12} - a'_{11}) = a'_{21} - a'_{22}$ oder schließlich $Q_1(a'_{12} - a'_{11}) = Q_2(a'_{22} - a'_{21})$. Diese Beziehungen kommen uns auch bei der Bestimmung des quantitativen Feldbildes zustatten (s. Pkt 7). Anwendungsbeispiele der Gleichungen (24) — (58) s. ebenfalls Pkt 7.

3. BESTIMMUNG DER RICHTUNG EINER FELDLINIE IN EINEM BELIEBIGEN PUNKT

a. Allgemeine Beziehungen

Die Feldstärke $\vec{K}_P$, die im Punkt $P \equiv (C, H)$ von den Linienladungen Q und $-Q$ (Bild 9; $Q > 0$) erzeugt wird, können wir in 2 Komponenten K' und K'' zerlegen, die in den Richtungen $Q \rightarrow P$ bzw. $P \rightarrow -Q$ wirken. Jeden der Vektoren $\vec{K}$, $\vec{K}'$ und $\vec{K}''$ kann man wiederum in Komponenten in den Richtungen OX und OY zerlegen. Indem wir die Strecken PC , PC^* mit a , b bezeichnen

$$a^2 = (h - H)^2 + C^2; \quad b^2 = (h + H)^2 + C^2 \quad (59)$$

erhalten wir

$$K_x = K'_x + K''_x = \frac{Q \sin \alpha}{2\pi\epsilon a} - \frac{Q \sin \beta}{2\pi\epsilon b}; \quad K_y = K'_y + K''_y = -\frac{Q \cos \alpha}{2\pi\epsilon a} - \frac{Q \cos \beta}{2\pi\epsilon b};$$

$$K_x = \frac{QC}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right); \quad K_y = -\frac{Q}{2\pi\epsilon} \left(\frac{h-H}{a^2} + \frac{h+H}{b^2} \right),$$

woraus der bekannte Ausdruck

$$K_p = \frac{Qh}{\pi \varepsilon ab} \quad (60)$$

folgt. Aus Bild 9 erhalten wir weiterhin

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{hp - H}{C} \quad (61)$$

wobei

$$p = \frac{h^2 + H^2 + C^2}{2hH} \quad (62)$$

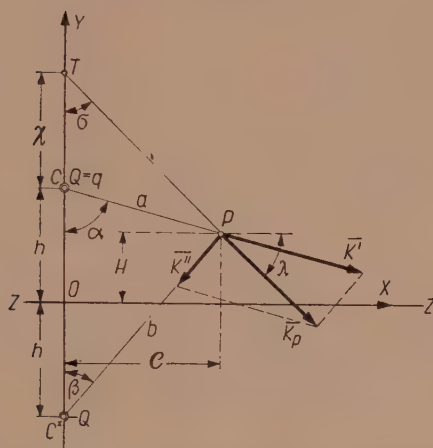


Bild 9. Die im Punkt P von den Punktquellen Q und $-Q$ hervorgerufene Feldstärke $\vec{K}_p$.

ist. Wenn wir $\vec{K}_p$ bis zum Schnittpunkt T mit der Ordinatenachse verlängern und die Strecken TC , TC^* mit χ , χ' bezeichnen, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{\chi + h - H}{C}$$

und daraus

$$\chi = \frac{a^2}{2H}; \quad \chi' = \frac{b^2}{2H}; \quad (63)$$

$$\sin \lambda = \frac{H^2 - h^2 - C^2}{ab}; \quad \cos \lambda = \frac{2HC}{ab}. \quad (64)$$

Die Gleichungen (63) und (60) erleichtern die Konstruktion des Vektors $\vec{K}_p$. Dieselbe Konstruktion gilt, wenn $Q < 0$ ist (Bild 10); Die Aus-

drücke (61) und (63) behalten ihre Gültigkeit, wobei jedoch jetzt λ der Winkel ist, der in Bild 10 gezeigt wird.

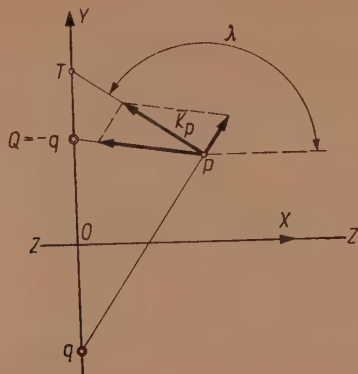


Bild 10. Die im Punkt P von den Punktladungen $-q$ und q hervorgerufene Feldstärke $\bar{K}_p$.

b. Richtung der Feldlinie in einem gegebenen Punkt

Wenn das Feld von 2 Linienladungen Q_1, Q_2 erzeugt wird, die sich in den Punkten $C_1 \equiv (c_1, h_1), C_2 \equiv (c_2, h_2)$ befinden, so erhalten wir auf Grund von (60) und (64) für die Komponenten K_x, K_y der resultierenden Feldstärke $\bar{K}_p$ im Punkt $P \equiv (\xi, \eta)$ die Ausdrücke

$$K_x = \frac{2Q_1 h_1 \eta (\xi - c_1)}{\pi \epsilon a_1^2 b_1^2} + \frac{2Q_2 h_2 \eta (\xi - c_2)}{\pi \epsilon a_2^2 b_2^2};$$

$$K_y = \frac{Q_1 h_1 [\eta^2 - h_1^2 - (\xi - c_1)^2]}{\pi \epsilon a_1^2 b_1^2} + \frac{Q_2 h_2 [\eta^2 - h_2^2 - (\xi - c_2)^2]}{\pi \epsilon a_2^2 b_2^2},$$

wobei

$$a_1^2 = (h_1 - \eta)^2 + (\xi - c_1)^2 = 2h_1 \eta (p_1 - 1); \quad b_1^2 = (h_1 + \eta)^2 + (\xi - c_1)^2 = 2h_1 \eta (p_1 + 1);$$

$$a_2^2 = (h_2 - \eta)^2 + (\xi - c_2)^2 = 2h_2 \eta (p_2 - 1); \quad b_2^2 = (h_2 + \eta)^2 + (\xi - c_2)^2 = 2h_2 \eta (p_2 + 1)$$

und

$$p_1 = \frac{h_1^2 + \eta^2 + (\xi - c_1)^2}{2h_1 \eta}; \quad p_2 = \frac{h_2^2 + \eta^2 + (\xi - c_2)^2}{2h_2 \eta} \quad (65)$$

ist. Daraus folgen mit

$$\mu = \frac{Q_1}{Q_2} \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{a_2^2 b_2^2}{a_1^2 b_1^2} = \frac{Q_1 h_2}{Q_2 h_1} \frac{p_2^2 - 1}{p_1^2 - 1}$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda &= \frac{K_y}{K_x} = \frac{Q_1 h_1 a_2^2 b_2^2 (\eta - h_1 p_1) + Q_2 h_2 a_1^2 b_1^2 (\eta - h_2 p_2)}{Q_1 h_1 a_2^2 b_2^2 (\xi - c_1) + Q_2 h_2 a_1^2 b_1^2 (\xi - c_2)} = \\ &= \frac{(\mu + 1) \eta - \mu h_1 p_1 - h_2 p_2}{(\mu + 1) \xi - \mu c_1 - c_2} \end{aligned} \quad (66)$$

Das Vorzeichen von λ ist dasselbe wie dasjenige von γ (Bild 2); der betreffende Quadrant läßt sich aus (64) oder (66) ermitteln. Mit Hilfe von (66) können wir den Winkel λ berechnen, den die Feldlinie mit der Waagerechten in einem beliebigen Punkt bildet; wir erhalten somit eine wertvolle Ergänzung der in Pkt 2 entwickelten Methoden, die eine solche Winkelbestimmung nicht umfaßten. Die Gleichung (78) gilt nur für Punkte mit $\eta > 0$; ist $\eta = 0$, so streben p_1, p_2 und somit auch $\operatorname{tg} \lambda$ zu ∞ . Daraus könnte man folgern, daß für alle Punkte auf der Erdoberfläche $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ ist, was aber für Singulärpunkte nicht gilt (siehe weiter unten Beispiel 1, Pkt. 4 d und Bild 15).

c. Beispiel 1

$c_1 = -100$; $c_2 = 100$; $h_1 = h_2 = 1000$; $Q_1 = -Q_2$. Es sind die Winkel λ für die Punkte (2,2) bzw. $(-2,2)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} \xi &= 2; \quad \eta = 2; \quad p_1 = 252,602; \quad p_2 = 252,402; \quad a_1^2 = 1006408; \\ b_1^2 &= 1014408; \quad a_2^2 = 1005608; \quad b_2^2 = 1013608; \quad \mu = -0,99841; \\ \operatorname{tg} \lambda &= 1,008987; \quad \lambda = 45^\circ 15' 20'' \\ \xi &= -2; \quad \eta = 2; \quad p_1 = 252,402; \quad p_2 = 252,602; \quad a_1^2 = 1005608; \\ b_1^2 &= 1013608; \quad a_2^2 = 1006408; \quad b_2^2 = 1014408; \quad \mu = -1,00159; \\ \operatorname{tg} \lambda &= -1,005795; \quad \lambda = 134^\circ 50' 5'' \end{aligned}$$

Dies läßt die Vermutung zu, daß im Punkt (0,0) die Winkel dieser beiden Feldlinien mit OX 45° und 135° betragen [Punkt (0,0) ist in diesem Fall ein Singulärpunkt, s. Bild 15, $k = 1$].

4. SINGULÄRE PUNKTE, LINIEN UND FLÄCHEN

a. Allgemeines

Punkte im elektrostatischen Feld, in welchen die Feldstärke $K = 0$ ist, nennt man bekanntlich Gleichgewichtspunkte. Linien und Flächen, deren sämtliche Punkte Gleichgewichtspunkte sind, heißen Gleichgewichtslinien bzw. -flächen.

Gleichgewichtspunkte, -linien und -flächen gehören zur Kategorie der Singulärelemente. Andere Singulärelemente sind Trennpunkte, -linien und -flächen (s. unten Pkt. e). Die Lagebestimmung der singulären Elemente im Feld hat insofern Bedeutung, als dadurch die Feldstruktur festgesetzt und Felddbilder gezeichnet werden können.

Im ebenen Feld haben wir auf der μ -Ebene (s. Pkt. 1a) nur mit Gleichgewichtspunkten zu tun; jeder dieser Punkte entspricht im Raum einer Gleichgewichtsgeraden. Die Lagebestimmung der Gleichgewichtspunkte auf der Erdoberfläche wurde in [1] besprochen (mittels Gl. (18) in [1] können Abszissen dieser Punkte berechnet werden); nun wollen wir die Eventualität der Existenz von Gleichgewichtspunkten analysieren, die nicht auf der Erdoberfläche liegen.

b. Koordinaten des Gleichgewichtspunktes

Wir kommen nunmehr auf das Feld zurück, das durch 2 Linienladungen Q_1, Q_2 erzeugt wird (Bild 11) und nehmen an, es existiere ein

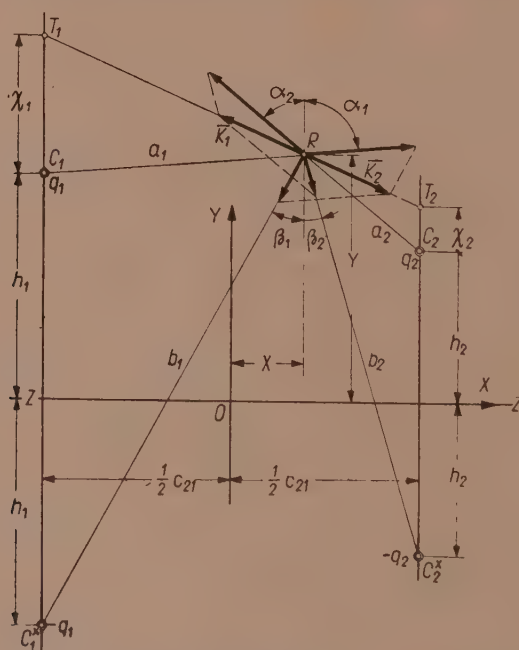


Bild 11. Gleichgewichtspunkt R im Feld zweier Punktladungen $\pm q_1$ und $\pm q_2$.

Gleichgewichtspunkt $R \equiv (X, Y)$ der nicht auf der Erdoberfläche liegt. Ohne Rücksicht auf die Vorzeichen von Q_1 und Q_2 können wir mittels (63) die Größen χ_1, χ_2 berechnen und die Punkte T_1, T_2 konstruieren. Wir

bezeichnen die Einheitsvektoren mit den Richtungen $\overrightarrow{T_1 R}$ und $\overrightarrow{T_2 R}$ mit $1_{T_1 R}$ und $1_{T_2 R}$ und finden auf Grund von (60) folgende Ausdrücke für die in R durch die Ladungspaare $\pm Q_1$, $\pm Q_2$ erzeugten Feldstärken $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$:

$$\overline{K}_1 = 1_{T_1 R} \frac{Q_1 h_1}{\pi \varepsilon_0 a_1 b_1}; \quad \overline{K}_2 = 1_{T_2 R} \frac{Q_2 h_2}{\pi \varepsilon_0 a_2 b_2}.$$

Die resultierende Feldstärke in R ist gleich Null; somit ist

$$\overline{K}_1 = -\overline{K}_2; \quad 1_{T_1 R} = -1_{T_2 R} \quad (67)$$

und daraus folgt, daß R auf der Geraden $T_1 T_2$ liegen muß. Somit muß auch

$$K_1 = \frac{Q_1 h_1}{a_1 b_1} = \frac{Q_2 h_2}{a_2 b_2} = K_2$$

sein; für die X - und Y -Komponenten von $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ erhalten wir (s. Bezeichnungen in Bild 11)

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{a_1} \cos \alpha_1 + \frac{Q_2}{a_2} \cos \alpha_2 &= \frac{Q_1}{b_1} \cos \beta_1 + \frac{Q_2}{b_2} \cos \beta_2 \\ \frac{Q_1}{a_1} \sin \alpha_1 + \frac{Q_2}{b_2} \sin \beta_2 &= \frac{Q_2}{a_2} \sin \alpha_2 + \frac{Q_1}{b_1} \sin \beta_1 \end{aligned}$$

Wenn wir in diese Gleichungen die Ausdrücke für Sinus und Cosinus der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ (z. B. $\sin \alpha_1 = \frac{c_{21} + 2X}{2a_1}$ usf.) wie auch für a_1, b_1, a_2, b_2 [z. B. $a_1^2 = (h_1 - Y)^2 + \left(X - \frac{1}{2}c_{21}\right)^2$] einsetzen, so können wir die erhaltenen Gleichungen nach X und Y lösen. Unter der Annahme

$$Q_1 h_1 + Q_2 h_2 \neq 0 \quad (68)$$

erhalten wir

$$X = \frac{c_{21}}{2} \frac{Q_1 h_1 - Q_2 h_2}{Q_1 h_1 + Q_2 h_2}, \quad (69)$$

$$Y^2 = h_1 h_2 \frac{Q_2 h_1 + Q_1 h_2}{Q_1 h_1 + Q_2 h_2} + c_{21}^2 \frac{Q_1 Q_2 h_1 h_2}{(Q_1 h_1 + Q_2 h_2)^2}. \quad (70)$$

Für (70) können wir auch

$$Y = \frac{h_1 h_2}{|h_1 \kappa_{12} + h_2|} \sqrt{\Delta} \quad (71)$$

schreiben, wobei

$$\Delta = 1 + \kappa_{12}^2 + 2 \kappa_{12} p; \quad p = \frac{h_1^2 + h_2^2 + c_{21}^2}{2 h_1 h_2} \quad (72)$$

ist. (70) und (71) liefern 2 Werte für Y , von welchen nur einer sich auf den wirklichen Raum $\mathcal{E}$ oberhalb der Erdoberfläche bezieht (wir nehmen an, das $\mathcal{E}$ die Erdoberfläche nicht einschließt); daraus ersieht man auch, daß die Ordinate Y des Gleichgewichtspunktes

- a) reell für $\Delta > 0$,
- b) $= 0$ für $\Delta = 0$,
- c) imaginär für $\Delta < 0$ ist.

Im Fall a) existiert in $\mathcal{E}$ nur 1 Gleichgewichtspunkt; im Fall b) liegt der Gleichgewichtspunkt auf der Erdoberfläche, im Fall c) schließlich existiert in $\mathcal{E}$ kein Gleichgewichtspunkt.

Wie in [1] [Pkt. 3, Gl. (53)] gezeigt wurde, stellt c) die Bedingung dafür dar, daß auf der Erdoberfläche 2 Gleichgewichtspunkte existieren; auf diese Weise werden die hier erhaltenen Resultate durch die Ergebnisse in [1] vervollständigt. Aus Bild 7 in [1] ersieht man deutlich, daß b) einen Grenzfall zwischen c) (2 Gleichgewichtspunkte auf der Erdoberfläche) und a) (ein Gleichgewichtspunkt in $\mathcal{E}$) bildet.

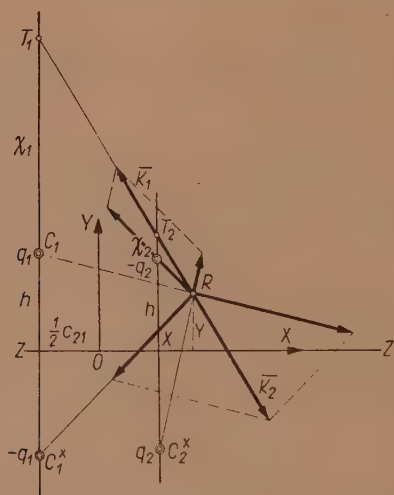


Bild. 12. Gleichgewichtspunkt R im Feld zweier Punktladungen $\pm q_1$ und $\pm q_2$.

Bild 12 stellt die Vektoren $\bar{K}$, $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ dar, wenn $X > \frac{1}{2} c_{21}$. Dabei wurde angenommen; $Q_1 = 4$; $Q_2 = -1$; $h_1 = h_2 = 5$; $c_{21} = 6$. Die Rechnung ergibt $a_1 = b_2 = 2\sqrt{17}$; $a_2 = 2\sqrt{2}$; $b_1 = 8\sqrt{2}$; $\chi_1 = 11^{1/3}$; $\chi_2 = 1^{1/3}$; $X = 5$; $Y = 3$.

Spezialfälle der Gleichungen (69) und (70).
für $h_1 = h_2 = h$ ist

$$X = \frac{1}{2} c_{21} \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2}; \quad Y^2 = h^2 + \frac{c_{21}^2 Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)^2}; \quad (73)$$

für $Q_1 = Q_2$ ist

$$X = \frac{1}{2} c_{21} \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}; \quad Y^2 = h_1 h_2 \left[1 + \frac{c_{21}^2}{(h_1 + h_2)^2} \right]; \quad (74)$$

$$\text{für } Q_1 = Q_2 \text{ und } h_1 = h_2 = h \text{ ist } X = 0, \quad Y^2 = h^2 + \frac{1}{4} c_{21}^2; \quad (75)$$

für $Q_1 = -Q_2$ ist Y imaginär. R liegt in diesem Fall auf der Achse $Z-Z$ (Fall c).

c. Richtung der Feldlinie im Gleichgewichtspunkt

Nach den Ausführungen in 4b wie auch nach Bild 11 und 12 könnte man vermuten, daß die durch R hindurchgehende Feldlinie in R die Richtung $T_1 T_2$ hat. Eigentlich ist in R $K = 0$, so daß sich kaum von einer Richtung des Vektors $\bar{K}$ in diesem Punkt sprechen läßt. In der Umgebung von R nimmt jedoch K von Null verschiedene Werte an.

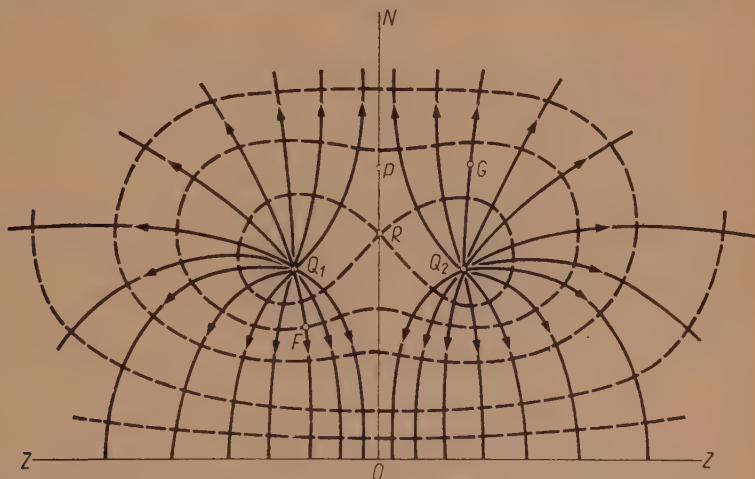


Bild. 13. Schematisches Feldbild für $Q_1 = Q_2$ und $h_1 = h_2$.

Man könnte sagen, daß die Feldlinie an den Punkt R „herankommt“ und von R „weggeht“, ohne streng genommen durch R „hindurchzugehen“. Beim Durchgang durch R geht der Wert K durch Null und die Richtung $\bar{K}$ ändert sich (in Gleichgewichtspunkten 1. Ordnung, siehe Bild 14) um 180° .

Die obenerwähnte Vermutung wird bestätigt, wenn man in (66) $\xi = X$ und $\eta = Y$ einsetzt, wobei X, Y durch (69) bis (71) gegeben sind. Wir finden für diesen Fall

$$\operatorname{tg} \lambda_R = \frac{\eta - h_1 p_1}{\xi - c_1} = \frac{\eta - h_2 p_2}{\xi - c_2} = \frac{Y - h_1 p_1}{X - c_1} = \frac{Y - h_2 p_2}{X - c_2}; \quad (76)$$

wenn wir diesen Ausdruck mit (61) vergleichen, finden wir, daß die Richtung λ_R mit $T_1 R T_2$ übereinstimmt. Dies erleichtert die Konstruktion des Winkels λ_R .

Aus Pkt 4d folgt, daß im Gleichgewichtspunkt 1. Ordnung sich 2 Feldlinien (im vorherbesprochenen Sinn) schneiden, die miteinander einen Winkel von 90° einschließen; somit ist dort diese zweite Feldlinienrichtung $\perp T_1 T_2$.

Betrachten wir nun noch den in Bild 13 dargestellten Spezialfall $Q_1 = Q_2$, $h_1 = h_2$. Nach (75) und (65) ist hier $Y = h_1 p_1$. Die Richtungen der Feldlinien in R sind hier parallel zu den Koordinatenachsen (vergl. Beispiel 2 in 4 g). Aus Bild 13 ist ersichtlich, daß als 2 durch R „hindurchgehende“ Feldlinien die Linienzüge $Q_1 R O$ und $Q_2 R N$ bzw. $Q_1 R N$ und $Q_2 R O$ angesehen werden können. Beide Linien sind singulär (s. 4e).

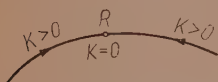


Bild 14. Feldstärke in Punkten einer Feldlinie, die durch den Gleichgewichtspunkt hindurchgeht.

d. Feldstruktur im Gleichgewichtspunkt

Für die hier behandelten ebenen Felder lautet die Laplace'sche Gleichung $\nabla^2 V = 0$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (77)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann in der Form $V = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$ dargestellt werden, wobei R eine Funktion von r , Θ — eine Funktion von ϑ bedeutet. Durch Einsetzen erhalten wir 2 Gleichungen

$$\frac{1}{R} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) = +n^2; \quad \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \vartheta^2} = -n^2 \quad (78)$$

wobei n^2 eine beliebige Zahl ist. Die Lösungen von (78) sind

$$\text{für } n=0 \quad R = C \ln r + D; \quad \Theta = A\vartheta + B;$$

$$\text{für } n \neq 0 \quad R = C r^n + D r^{-n}; \quad \Theta = A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta$$

(A , B , C , D sind Integrationskonstanten); somit erhalten wir folgende Lösungen der Gleichung (77):

$$\text{für } n=0 \quad V = A_0 + (A\vartheta + B)(C \ln r + D);$$

$$\text{für } n \neq 0 \quad V = A_0 + (A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta)(C r^n + D r^{-n}).$$

Als Anfangspunkt des Koordinatensystems wählen wir den Gleichgewichtspunkt R . Bekanntlich (s. Zusatz in [2]) wird als Gleichgewichtspunkt k -ter Ordnung ein Punkt bezeichnet, für welchen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^m V}{\partial r^m} = 0 \text{ für } m=1, 2, 3 \dots k \text{ und } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^m V}{\partial r^m} \neq 0 \text{ für } m=k+1.$$

Für $n=0$ ist $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{C}{r}$, folglich muß $n \neq 0$ angenommen werden. Falls n eine positive ganze Zahl ist, können wir die Lösung von (77) in folgender Form schreiben:

$$V = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta) (C_n r^n + D_n r^{-n}). \quad (79)$$

Aus (79) folgt

$$\frac{\partial^k V}{\partial r^k} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta) \left[C_n \frac{n!}{(n-k)!} r^{n-k} + D_n \frac{(-1)^k (n+k)!}{(n-1)!} r^{-n-k} \right].$$

Wir folgern daraus, daß $D_n=0$ und daß für $k \geq n$ $C_n=0$ sein muß. Wir erhalten somit anstatt (79)

$$V = A_0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta) r^n$$

Ferner nehmen wir an, daß der Winkel $\vartheta=0$ in der μ -Ebene der Tangente derjenigen V_0 -Aequipotentiallinie entspricht, die durch R hindurchgeht. Für $\vartheta=0$ ist dann

$$V = V_0 = A_0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} A_n r^n.$$

Daraus folgt $A_0=V_0$; $A_n=0$, so daß wir anstatt (79)

$$V = V_0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} B_n r^n \sin n\vartheta \quad (80)$$

erhalten. Für Gleichgewichtspunkte 1. Ordnung finden wir aus (80)

$$V = V_0 + B_2 r^2 \sin 2\vartheta + B_3 r^3 \sin 3\vartheta + \dots$$

Für Punkte in unmittelbarer Nähe von R , für welche $r \rightarrow 0$, können wir die Potenzen streichen, die größer als 2 sind; somit erhalten wir für $k=1$

$$V = V_0 + B_2 r^2 \sin 2\vartheta. \quad (81)$$

Der Ausdruck (81) erfüllt die gestellten Forderungen: die Ebene $\vartheta=0$ ist für Punkte in der Umgebung von $r=0$ die Aequipotentialebene mit

dem Potential V_0 ; außerdem ist $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r \rightarrow 0} = 0$. Aus (81) ist auch ersichtlich, daß dieselbe Bedingung noch von einer anderen Ebene und zwar für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erfüllt wird; es existieren somit daselbst 2 Aequipotentialebenen, die zueinander senkrecht sind. In derselben Weise erhalten wir

$$\text{für } k=2 \quad V = V_0 + B_3 r^3 \sin 3\vartheta \quad (82)$$

$$\text{für } k=3 \quad V = V_0 + B_4 r^4 \sin 4\vartheta \text{ usf.} \quad (83)$$

Aus (82) folgt, daß durch den Gleichgewichtspunkt 2. Ordnung 3 Aequipotentialflächen hindurchgehen, die den Werten $\vartheta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ entsprechen; durch den Gleichgewichtspunkt 3. Ordnung gehen 4 Aequipotentialflächen und zwar: $\vartheta = 0, \pm \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Für die Feldstärke in R erhalten wir aus (80)

$$\bar{K} = -1_r \frac{\partial V}{\partial r} - 1_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = - \sum_{n=k+1}^{\infty} n B_n (1_r r^{n-1} \sin n\vartheta + 1_\vartheta r^{n-1} \cos n\vartheta).$$

Der Nullwert der Feldstärke $\bar{K}$ in R wird (siehe Pkt. 4b und Bild 11) dadurch erklärt, daß $\bar{K}$ dort die Resultante von einem Paar (oder mehreren Paaren) der Komponenten $\bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$ ist, wobei $\bar{K}_1 = -\bar{K}_2$ ist. Es folgt daraus, daß in der unmittelbaren Umgebung von R die Feldstärke $\bar{K}$ die Richtung 1_r hat und keine tangentielle Komponente 1_ϑ aufweist; daher muß

$$\text{für } n=k+1, k+2, \dots \quad \cos n\vartheta = 0$$

sein. Es folgen daraus die Richtungen von $\bar{K}$ in R ; ist p eine ganze ungerade Zahl, so ist

$$\text{für } k=1 \quad 2\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} p \quad \text{dh.} \quad \vartheta = \pm \frac{\pi}{4}, \dots$$

$$k=2 \quad 3\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} p \quad \text{„} \quad \vartheta = \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{oder} \quad \pm \frac{\pi}{2}, \dots$$

$$k=3 \quad 4\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} p \quad \text{„} \quad \vartheta = \pm \frac{\pi}{8} \quad \text{„} \quad \pm \frac{3\pi}{8}, \dots$$

Die Aequipotentiallinien und Richtungen von $\bar{K}$ in Gleichgewichtspunkten 1., 2. und 3. Ordnung stellt das Bild 15 dar¹.

¹ Dieselben Resultate auf einem etwas anderen Wege abgeleitet, findet man in [3].

c. Trennlinien und Trennpunkte

Wenn 2 Feldröhren mit demselben Orientierungssinn auf dem ganzen Weg von einer Aequipotentialfläche δ zur Quelle sich längs der Teile ihrer Seitenflächen oder längs einer auf dieser Fläche gelegenen Kurve berühren, so nennen wir diese Röhren Nachbar-Feldröhren (analoge Bedeutung hat der Termin: Nachbar-Feldlinien). Eine Anzahl solcher Nachbarröhren oder -linien werden wir als Röhrenbüschel (bzw. Linienbüschel) bezeichnen. Auf der Fläche wird das erwähnte Büschel durch eine Linie p derart begrenzt, daß die Feldlinien, die von δ ausgehen, nach dem Überschreiten von p entweder zu derselben Quelle längs eines anderen Weges oder aber zu einer anderen Quelle verlaufen (allgemein genommen kann es vorkommen, daß diese Quellen sich in der Unendlichkeit befinden; bei den hier betrachteten ebenen Feldern ist dies nicht der Fall). p nennen wir die Trennlinie auf der Fläche δ . Zwei Feldlinien, die δ in Punkten schneiden, welche auf beiden Seiten von p liegen, können somit keine Nachbarlinien sein. Feldlinien, die von den Punkten der Trennlinie p zu einer Quelle (bzw. zu beiden Quellen Q_1, Q_2) verlaufen, nennen wir ebenfalls Trennlinien oder aber Büschel-Grenzlinien g ; die Linien g bilden die Büschel-Grenzfläche γ (Trennfläche γ).

In dem hier betrachteten Feld können wir auf der μ -Ebene (s. Pkt. 1) anstatt einer Aequipotentialfläche δ die Gerade $Z-Z$ wählen; anstatt der Trennlinie p kann hier ein Trennpunkt P vorhanden sein; durch diesen Punkt geht die Grenzlinie g (g ist der geometrische Ort der Trennpunkte P). Die Feldlinie g kann durch den Winkel charakterisiert werden, den sie im Quellpunkt mit der Waagerechten (bzw. mit der Lotrechten) bildet. Diesen Winkel nennen wir Grenz- oder Trennwinkel am Quellpunkt. Die Trennlinien und die Trennpunkte gehören zur Kategorie der singulären Elemente. Aus dem Obengesagten geht hervor, daß folgende Feldlinien ebenfalls den Charakter von Trennlinien besitzen:

1. eine Feldlinie, die durch zwei Trennpunkte hindurchgeht, welche auf zwei Aequipotentiallinien liegen;
2. eine Feldlinie, die durch den Gleichgewichtspunkt hindurchgeht;
3. eine Feldlinie, die zum Punkt $\xi = \infty$ führt (diese Feldlinie ist eine Grenzlinie zweier Büschel, die von einer Quelle zum linken und zum rechten (von P aus gesehen) Teil der Geraden $Z-Z$ verlaufen).

f. Netz der Singulärlinien im Fall $\kappa_{12} < 0$

Im Vorigen wurden Methoden beschrieben, mit denen man die Lage des Gleichgewichtspunktes R bestimmen kann. Liegt dieser im Raum E (Pkt. 4 b), so ist er immer ein Gleichgewichtspunkt 1. Ordnung. Wie wir

aus Pkt. 4 d (Bild 15/1), wissen, gehen durch R zwei Feldlinien, die miteinander einen rechten Winkel bilden. Drei Äste dieser Linien führen zu den beiden Quellen Q_1, Q_2 . Ein auf der Erdoberfläche befindlicher Gleichgewichtspunkt kann erster oder zweiter Ordnung sein. Durch diesen Punkt gehen unter den in 4. angegebenen Winkeln 2 oder 3 Feldlinien hindurch.

Die Abszisse des Trennpunktes auf der Erdoberfläche können wir mittels der Ausführungen in Pkt. 2bA3 bestimmen: P ist der Schnittpunkt der Feldlinie, die durch R hindurchgeht, mit $Z-Z$. Den Trennwinkel d.h. den Winkel, der durch diese Feldlinie im Quellpunkt (mit der Waagerechten) gebildet wird, berechnen wir mittels Gleichungen im Pkt. 2bBl. Durch Anwendung anderer, bereits geschilderter Methoden

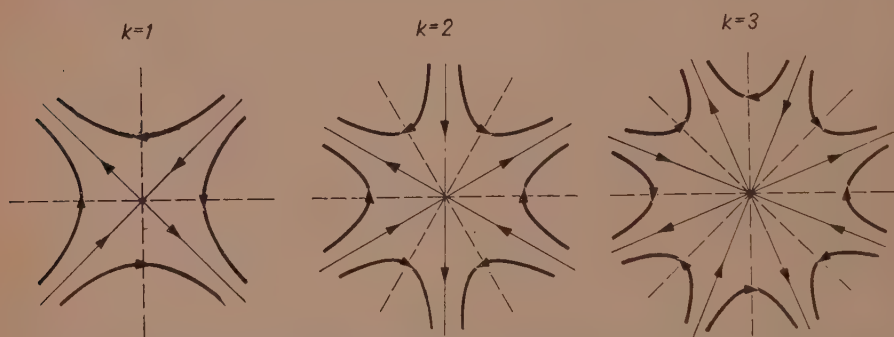


Bild 15. Feldlinien und Spuren der Aequipotentialflächen in der Umgebung von Gleichgewichtspunkten 1., 2. und 3. Ordnung.

können wir weitere Trennpunkte berechnen und dadurch die Lage der betreffenden Trennlinien bestimmen. Auf diese Weise sind wir in der Lage, das Netz der Singulärelemente zu fixieren, was die notwendige Vorarbeit zur Zeichnung des Feldbildes ist. Das Netz soll Gleichgewichtspunkte R , Trennpunkte P auf der Erdoberfläche wie auch andere Singulärstellen, die von den Quellpunkten durch R zu P oder zu ∞ führen, enthalten.

In [1] (Bild 6) sind die charakteristischen Formen der hier betrachteten Felder dargestellt. Wenn wir die nach Pkt. 4 A, B, C bestimmten Netze der Singulärelemente einzeichnen, so erhalten wir das schematische Bild 16 (die Nummern 1 bis 9 der Einzelfelder entsprechen den Nummern in Bild 6 [1]; darin bedeuten R, R_1, R_2 die Gleichgewichtspunkte, P — den Trennpunkt; die Kurven stellen den ungefähren Verlauf der Trennlinien dar. Der Pfeil mit dem Zeichen ∞ bedeutet, daß die betreffende Feldlinie zur Unendlichkeit verläuft. Die Trennwinkel teilen die ganze Ladung der Leitung 1. oder 2. in einzelne Büschel, die in Bild 16

durch Sektoren dargestellt sind; die Pfeile bei den Sektoren zeigen an, wohin die Linien der betreffenden Büschel führen (z. B. $\rightarrow 2$ bedeutet, daß die Linien zur Ladung Q_2 verlaufen; das Zeichen $\rightarrow Z_1$ bedeutet, daß

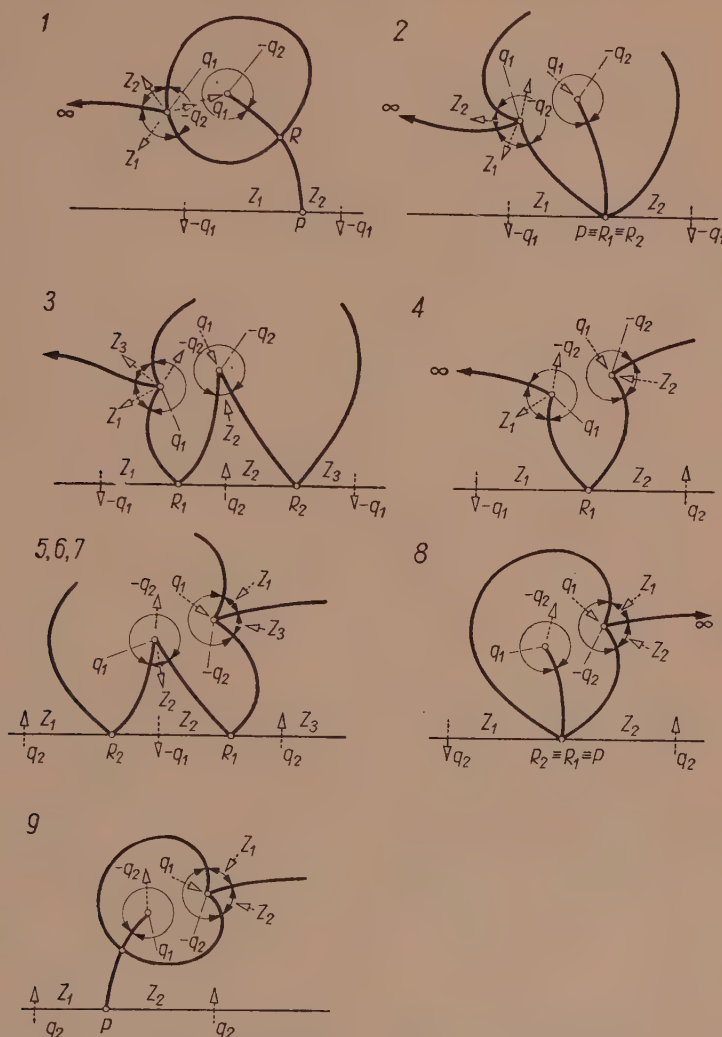


Bild 16. Netz der Singulärlinien für 7 charakteristische Feldformen.

die Feldlinien zu demjenigen Teil von $Z - Z$ führen, der mit Z_1 bezeichnet ist, u.s.w.).

Es wurde dabei (ebenso wie im Bild 6 [1]) angenommen, daß q_1 konstant und das Verhältnis $k = q_1/q_2$, das im Bild 16/1 größer als 1 ist, mit dem Ansteigen der Ordnungsnummer allmählich kleiner wird, so daß

k im Bild 16/9 kleiner als 1 ist (die Werte von k siehe Bild 6 in [1]). Beim stetigen Anwachsen von q_2 gehen die Einzelbilder 1 bis 9 ineinander über:

- 1 Die Grenzlinien des Büschels der Feldlinien, die von q_1 zu Q_2 verlaufen, sind: q_1aRQ_2 und q_1bRQ_2 ; Grenzlinien des Büschels zwischen q_1 und Z_1 sind: $q_1\infty$ und q_1aRP ; die Grenzlinien des Büschels zwischen q_1 und Z_2 sind: $q_1\infty$ und q_1bRP .
- 1 bis 2 R strebt längs der Trennlinie Q_2P zur Erdoberfläche.
- 2 R liegt auf der Oberfläche; dabei ist R gleichzeitig der Trennpunkt.
- 2 bis 3 R wird in R_1 und R_2 „gespalten“, R_1 und R_2 entfernen sich voneinander (R_2 verläuft nach rechts).
- 3 bis 4 R_2 strebt zu $+\infty$. Die Feldröhren, die q_1 und Z_3 verbinden, werden immer „schwächer“.
- 4 R_2 befindet sich in der Unendlichkeit, es verbleibt nur R_1 .
- 4 bis (5, 6, 7) Von links (d.h. vom Punkt $\xi = -\infty$ her) erscheint der Punkt R_2 , der mit dem Anwachsen von q_2 nach rechts strebt.
- (5, 6, 7) bis 8 Weiteres Annähern von R_2 und R_1 .
- 8 R_2 und R_1 kommen im Trennpunkt $P \equiv R$ zusammen.
- 8 bis 9 R strebt nach oben längs der Trennlinie $P q_1$.

In Pkt. 2b steht die Bemerkung, man solle vor einer detaillierten Lagebestimmung der Punkte im Feld zuerst eine Voruntersuchung anstellen, um zu prüfen, ob die entsprechenden Gleichungen überhaupt anwendbar sind. Diese Voruntersuchung läßt sich durchführen, sobald das Netz der Singulärlinien gezeichnet ist und dadurch die Bereiche festgestellt sind, deren Grenzen von Feldlinien nicht geschnitten werden dürfen (siehe Pkt. 5 a, b; die Anzahl dieser Bereiche ist in der Zahlentafel 1 angegeben). Mit Hilfe dieses Netzes kann man den provisorischen Verlauf der Feldlinien skizzieren, wie dies in Bild 17 geschehen ist. Um die so erhaltenen Bilder zu verbessern, muß man

1. den Verlauf der einzelnen Feldlinien genauer festlegen, indem man einzelne charakteristische Punkte derselben nach den Methoden in Pkt. 2b berechnet;

2. muß man die Felddichte in jedem Punkt berücksichtigen. Dazu muß man vom „qualitativen“ zum „quantitativen“ Bild übergehen. Der erste Schritt in dieser Richtung ist die Berechnung der Flüsse aller Sektoren in 1. und 2. mittels Gl. (7) bis (11) (bzw. (19) bis (34) in [1]); diese Flüsse müssen in einzelne Feldröhren mit dem Röhrenfluß φ zergliedert werden. In den hier durchgerechneten Beispielen ist $\varphi = 5 \mu C/km$ angenommen worden; dabei läßt sich jedoch nicht vermeiden, daß in jedem Sektor wenigstens eine Röhre vorhanden ist, die etwa „nicht ganz voll“ ist (eine gewisse Abhilfe bestünde darin, φ kleiner zu wählen, was zwar

Zahlentafel 1

Singuläre Punkte und Linien in Feldern mit $\kappa_{12} = Q_1/Q_2 < 0$.

Bild*) Nr	Gleichgewichtspunkte			Trennpunkte**)			Anzahl der Be- reiche	Bemerkungen
	über der Erde	auf der Erde	Ord- nung	auf Leitung Q_1	auf Leitung Q_2	auf der Erde		
1	1	—	1	3	1	1	3	
2	—	1	2	3	1	1	3	$R_1 \equiv R_2 \equiv P$
3	—	2	1	3	2	—	4	
4	—	1	1	2	2	—	3	Zweiter Gleich- gewichtspunkt in der Unend- lichkeit
5, 6, 7	—	2	1	2	3	—	4	
8	—	1	2	1	3	1	3	$R_1 \equiv R_2 \equiv P$
9	1	—	1	1	3	1	3	

*) Siehe Bild 16 und Bild 6 in [1].

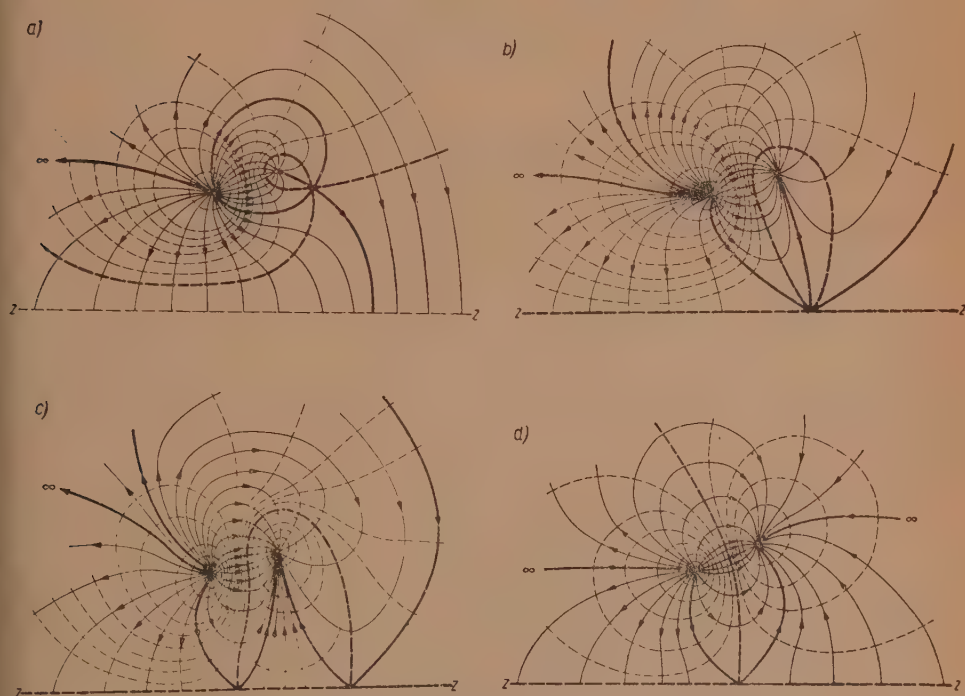
**) In dieser Zahl ist der Punkt $\xi = \pm \infty$ nicht enthalten.


Bild 17. Schematische Feldbilder für charakteristische Feldformen 1 bis 4 in Bild 16.

zu einem besseren Bild führen, jedoch die Rechenarbeit stark vermehren würde). Die einzelnen Feldröhren werden durch die nach Pkt. 2bC2 zu berechnenden Winkel bestimmt, die sie in den Quellpunkten bilden. Einzelheiten sind in Pkt. 7 bei den durchgerechneten Beispielen angegeben.

Hat man das Singulärliniennetz und das Feldbild, so kann man auch das Netz der Aequipotentiallinien zeichnen, wobei allgemein bekannte Methoden anzuwenden sind.

Die Bilder 17/1—4 sind „nach dem Gefühl“ gezeichnet. Diese Methode ist zwar sehr arbeitsparend, liefert aber quantitativ nicht immer zufriedenstellende Resultate.

g. Beispiel 2

Es wurde hier ein besonders einfaches Feld gewählt (Bild 13), wobei die berechneten Formeln sich leicht auswerten lassen. Das Potential V_p der Punkte $P \equiv (0, \eta)$, die auf der Geraden ON liegen, ist nach (59)

$$V_p = \frac{Q_1}{2\pi l \varepsilon} \cdot 2 \ln \frac{b}{a} = \frac{Q_1}{2\pi l \varepsilon} \ln \frac{c_{21}^2 + 4(\eta + h)^2}{c_{21}^2 + 4(\eta - h)^2}.$$

V_p ist am größten, wenn $dV_p/d\eta = 0$, was die Bedingung $\eta^2 = h^2 + \frac{1}{4} c_{21}^2 = Y^2$ ergibt; nach (75) hat von den Punkten der Geraden ON der Punkt R das größte Potential, nämlich

$$V_{p\max} = \frac{Q_1}{2\pi l \varepsilon} \ln \frac{1/4 c_{21}^2 + (Y + h)^2}{1/4 c_{21}^2 + (Y - h)^2},$$

Die Feldstärke $\bar{K}$ in den Punkten der Geraden ON finden wir aus

$$\bar{K} = -1_x \frac{\partial V}{\partial x} - 1_y \frac{\partial V}{\partial y} \approx 1_y 16hQ_1(4\eta^2 - c_{21}^2 - 4h^2);$$

es folgt daraus, daß bei $Q_1 > 0$ die Feldstärke $\bar{K}$ in den Punkten $\eta > Y$ die Richtung $\overrightarrow{RN}$ hat, in den Punkten $\eta < Y$ dagegen die Richtung $\overrightarrow{RO}$ (Bild 13).

5. BEGRÜNDUNG DER GLEICHUNG (19). VERALLGEMEINERUNGEN

a. Die Anwendung von (19) einschränkenden Bedingungen

Fassen wir (Bild 18) zwei parallele Feldlinien k_1 und k_2 ins Auge, die in den parallelen Ebenen μ_1 und μ_2 liegen; wir wählen auf k_1 zwei Punkte P_1 und P_1'' und ebenso auf k_2 zwei Punkte P_2' und P_2'' so daß $P_1 P_2' = l' \perp \mu_1$ und $P_1'' P_2'' = l'' \perp \mu_1$ ist ($l' = l''$ ist dann der Abstand zwischen μ_1 und μ_2).

Auf der Fläche, die durch k_1 und k_2 hindurchgeht, betrachten wir den Bereich S , der von $L = P'_1 P'_2 M_2 P''_2 P'_1 M_1 P'_1$ begrenzt wird. Der Fluß ψ durch S ist dann

$$\psi = \int_S \epsilon_0 \bar{K} \cdot d\bar{S} = 0, \quad (84)$$

da $\bar{K}$ in allen Punkten der Fläche S die tangentielle Richtung hat. Anstatt (84) werden wir auch

$$\psi = \int_{P'_1 M_1 P''_1} \epsilon_0 \bar{K} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (85)$$

schreiben. Die Gl. (84) bleibt auch für einen anderen Flächenbereich S' richtig, der denselben Umriß L hat, falls die Bedingung (a) erfüllt ist.

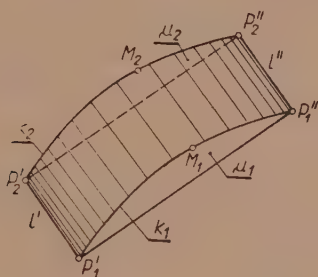


Bild 18. Integrationsfläche des Integrals (84).

Diese Bedingung lautet: der Fluß des Vektors $\bar{K}$ durch die geschlossene Fläche SS' , die von S und S' gebildet wird, muß gleich Null sein.

Wir wählen jetzt S' so, daß es aus 3 Teilen S'_1 , S'_2 , S'_3 besteht, wobei S'_1 durch $P'_1 M_1 P'_1 P'_1$ (auf μ_1) und S'_3 durch $P'_2 M_2 P'_2 P'_2$ (auf μ_2) begrenzt wird und S'_2 das Rechteck $P'_1 P'_2 P'_2 P'_1$ ist, das zu μ_1 und $\mu_2 \perp$ ist. Wir nehmen ferner an, daß im Innern der geschlossenen Fläche SS' keine Ladung vorhanden ist. Wir haben dann:

$$\int_{S'_1} \epsilon_0 \bar{K} \cdot d\bar{S} + \int_{S'_2} \epsilon_0 \bar{K} \cdot d\bar{S} + \int_{S'_3} \epsilon_0 \bar{K} \cdot d\bar{S} = 0$$

und nachdem das erste wie auch das dritte Integral gleich Null ist ($\bar{K}$ ist $\parallel$ zu S'_1 und zu S'_3), erhalten wir

$$\int_{P'_1 P'_1} \epsilon_0 \bar{K} \cdot d\bar{S} = 0 \quad (86)$$

wobei also die Integrationsfläche in (86) das Rechteck S'_2 ist. Wenn wir (85) mit (86) vergleichen, so sehen wir, daß hier die Umformung des Bogens $P'_1 M_1 P''_1$ in die Strecke $P'_1 P''_2$ stattgefunden hat, was nur bei erfüllter Bedingung (α) zulässig ist; dies nehmen wir auch weiter unten an.

(86) stellt keine hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Punkte P'_1 und P''_2 auf einer Feldlinie liegen; dies wurde bereits in 3 b und 3 c erwähnt (vgl. auch z.B. die Punkte F und G in Bild 13; der Fluß durch FG ist gleich Null). Um der notwendigen Bedingung (86) den Charakter einer hinreichenden zu verleihen, muß der Integrationsweg $P' P''$ folgenden einschränkenden Annahmen (β) unterliegen: 1) die Punkte P' und P'' müssen innerhalb desselben, von den Grenzlinien gebildeten (und in der Tafel 1 erwähnten) Bereiches liegen und entweder 2) darf der Weg $P' P''$ keine Singulärlinie schneiden oder 3) muß die Anzahl der Schnittpunkte des Weges $P' P''$ mit jeder Singulärlinie, die hier nach 1) in Betracht kommt, gerade sein. Wie man aus den Bildern 16/1, 2, 8, 9 ersieht, brauchen sich z.B. die Aussagen 1) und 2) nicht zu decken.

Wir ersehen daraus, daß man vor Anwendung der Gl. (19), folglich auch der Gleichungen (20) und (21), erst untersuchen muß, ob die Bedingungen (α) und (β) erfüllt sind.

b. Werte W für zusammengesetzte Wege

Wir wollen jetzt die Flüsse ψ_{ADC} und ψ_{ABC} im Feld einer einzigen Leitung Q (Bild 19) berechnen. Der Bogen ADC läßt sich nach Pkt. 5 a in die gerade Strecke AC umformen, so daß, wenn man $P' \equiv A$ und $P'' \equiv C$ setzt, unmittelbar Gl. (7) verwendet werden kann:

$$\psi_0(ADC) = \alpha' + \beta' - \alpha'' - \beta'' + \pi W_{ADC}. \quad (87)$$

W_{ADC} errechnen wir mittels der in Pkt. 1 b entwickelten Methoden. Auf die gleiche Weise erhalten wir nach (7)

$$\psi_0(ABC) = \alpha' + \beta' - \alpha'' - \beta'' + \pi W_{ABC}. \quad (88)$$

Nachdem α' , β' , α'' , β'' nur von den Koordinaten der Endpunkte A und C abhängen, unterscheiden sich die Ausdrücke (87) und (88) nur durch die Werte W . Eine Umformung des Weges ABC in ADC ist nicht statthaft, da hier die Bedingung (α) nicht erfüllt ist; wir können jedoch hier die Bögen AB und CD in die geraden Strecken AB , CD verwandeln und schreiben

$$\psi_{ABC} = \psi_{AB} + \psi_{BC}.$$

Um ψ_{0AB} zu berechnen, setzen wir $A \equiv P' \equiv (\xi', \eta')$; $B \equiv P'' \equiv (\xi_B, \eta_B)$ und erhalten

$$\psi_0(AB) = \alpha' + \beta' - \arctg \frac{c_1 - \xi_B}{h_1 - \eta_B} - \arctg \frac{c_1 - \xi_B}{h_1 + \eta_B} + \pi W_{AB}. \quad (89)$$

auf ähnliche Weise berechnen wir ψ_{BC} indem wir $B \equiv P' \equiv (\xi_B, \eta_B)$; $C \equiv P'' \equiv (\xi'', \eta'')$ setzen:

$$\psi_{0(BC)} = \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi_B}{h_1 - \eta_B} + \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi_B}{h_1 + \eta_B} - \alpha'' - \beta'' + \pi W_{BC}. \quad (90)$$

Durch Vergleich von (88), (89) und (90) erhalten wir

$$W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC}. \quad (91)$$

Gleichung (91) kann man verallgemeinern für Wege, die aus mehreren Abschnitten bestehen, wie auch für Felder, die von mehreren Punktquellen erzeugt werden. Dieselbe Beziehung (91) würden wir auch erhalten, wenn wir anstatt (7) die Gl. (8) angewendet hätten.

Beispiel 3.

Es sollen die Flüsse ψ_{ADC} und ψ_{ABC} (Bild 20) berechnet werden. Dabei sollen die Fälle, wenn A oder C in der Unendlichkeit liegen, berücksichtigt werden. Wir erhalten für den Weg ADC: $W_{ADC} = 0$.

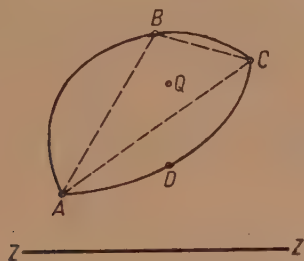


Bild 19. Berechnung von W für die Wege ABC und ADC.

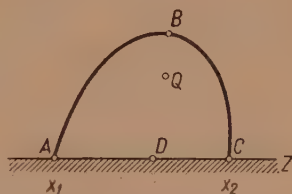


Bild. 20. Hilfszeichnung zum Beispiel 3.

$$\psi_{ADC} = \frac{Q}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_1}{h_1} - \operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_2}{h_1} \right);$$

$$\psi_{-\infty, DC} = \frac{Q}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_2}{h_1} \right); \quad \psi_{AD, +\infty} = \frac{Q}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_1}{h_1} + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\psi_{-\infty, D, +\infty} = Q.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für den Weg ABC

$$W_{AB} = -1; \quad W_{BC} = -1; \quad W_{ABC} = -2;$$

$$\psi_{ABC} = \frac{Q}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_1}{h_1} - \operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_2}{h_1} - \pi \right);$$

$$\psi_{-\infty, BC} = \frac{Q}{\pi} \left(-\operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_2}{h_1} - \frac{\pi}{2} \right); \quad \psi_{BC, +\infty} = \frac{Q}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_1}{h_1} - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\psi_{-\infty, B, +\infty} = 0.$$

6. DAS FELD ZWEIER LADUNGEN DESSELBEN VORZEICHENS

a. Lage des Gleichgewichtspunktes

Aus dem Ausdruck (50) [1] und den Kurven aus Bild 12 u. 13 in [1] ersehen wir, daß im normalen Betrieb einer Doppelleitung die Ladungen Q_1 und Q_2 stets verschiedene Vorzeichen aufweisen; auch wenn eine dieser Ladungen geerdet wird, bleibt noch immer $\kappa_{12} < 0$. Dieses Feld wird in den Punkten 2 b, 3 c, 4 f behandelt.

Einen positiven Wert κ_{12} können wir in dem ganz besonderen Spezialfall erhalten, wenn eine der Leitungen mit einem Punkt von verhältnismäßig hohem Potential (der Erde gegenüber) in Berührung kommt. Im Fall $\gamma_{11} \neq \gamma_{22}$ (vgl. [1]) wird $\kappa_{12} > 0$, wenn

$$\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} < \frac{V_1}{V_2} < \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \quad (92)$$

Diese Ungleichungen führen zu hohen absoluten Werten von V_1 und V_2 (s. Beisp. 2 in [1]). Da jedoch solche Fälle immerhin vorkommen können, werden wir uns kurz mit dem Feld bei $\kappa_{12} > 0$ beschäftigen. Zunächst befassen wir uns mit der Lage des Gleichgewichtspunktes R. Den Ausdruck (69) kann man auch in der Form

$$X = \frac{c_{21}}{2} \cdot \frac{\kappa_{12}\chi_{12} - 1}{\kappa_{12}\chi_{12} + 1} \quad (93)$$

schreiben. Daraus folgt die Zahlentafel 2.

Zahlentafel 2.

Nr	κ_{12}	X
1	$-\infty$	$c_2 \left(= \frac{1}{2} c_{11} \right)$
2	$< -\chi_{21}$	$> c_2$
3	$-\chi_{21}$	$\pm \infty$
4	$> -\chi_{21}$ und < 0	$< c_1 \left(= -\frac{1}{2} c_{21} \right)$
5	0	c_1
6	> 0 und $< \chi_{21}$	$> c_1$ und < 0
7	χ_{21}	0
8	$> \chi_{21}$	> 0 und $< c_2$
9	$+\infty$	c_2

Die Angaben in dieser Zahlentafel wie auch der Ausdruck (93) gelten nur dann genau, wenn Q_1 , Q_2 Punktladungen sind; R liegt dann innerhalb des Streifens, der durch 2 lotrechte Gerade, die durch Q_1 und Q_2

hindurchgehen, gebildet wird. Wenn man aber den Umstand berücksichtigt, daß die Querschnitte der Leitungen kleine Kreise mit dem Halbmesser r_0 sind, so gilt (93) nur angenähert und die größten Abweichungen finden in Nr. 1, 5 und 9 der Zahlentafel 2 statt. Was die Ordinate Y von R betrifft, so folgt aus (84), daß für $\kappa_{12} > 0$ stets $Y > 0$ ist und

$$Y \geq h_2 \text{ wenn } 2h_1(h_1p - h_2)\kappa_{12} \geq h_2^2 - h_1^2, \quad (94)$$

$$Y \geq h_1 \text{ wenn } (h_1^2 - h_2^2)\kappa_{12} \leq 2h_2(h_2p - h_1). \quad (95)$$

Da $p > 1$ ist und jetzt $\kappa_{12} > 0$ angenommen wird, ist bei $h_1 > h_2$ die Ungleichung (94) stets erfüllt. Somit ist $Y > h_2$ bei $h_1 > h_2$ und $Y > h_1$ bei $h_2 > h_1$. Wir setzen

$$\kappa'_{12} = \frac{2h_2(h_2p - h_1)}{h_1^2 - h_2^2}; \quad \kappa''_{12} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2h_1(h_1p - h_2)}.$$

$$\text{Bei } h_1 > h_2 \text{ ist } \kappa'_{12} > 0, \quad \text{wenn } h_1^2 < h_2^2 + c_{21}^2, \quad (96)$$

$$\text{bei } h_2 > h_1 \text{ ist } \kappa''_{12} > 0, \quad \text{wenn } h_2^2 < h_1^2 + c_{21}^2. \quad (97)$$

Es folgt daraus, daß man für $\kappa_{12} > 0$, $h_1 > h_2$ und $h_1^2 < h_2^2 + c_{21}^2$ folgende Beziehungen erhält: $Y > h_1$ bzw. $= h_1$, bzw. $< h_1$, wenn $\kappa_{12} < \kappa'_{12}$, bzw. $= \kappa'_{12}$, bzw. $> \kappa'_{12}$. Ist $h_1^2 \geq h_2^2 + c_{21}^2$, so ist auch $Y < h_1$. Für $h_1 = h_2$ ist $Y > h_1$. Schließlich ist für $h_2 > h_1$ und $h_2^2 < h_1^2 + c_{21}^2$, $Y > h_2$, bzw. $= h_2$, bzw. $< h_2$, wenn $\kappa_{12} > \kappa''_{12}$, bzw. $= \kappa''_{12}$, bzw. $< \kappa''_{12}$; ist $h_2^2 \geq h_1^2 + c_{21}^2$, so ist auch $Y < h_2$.

b. Berechnung des Grenzwertes κ_{12gr}

Bezeichnen wir jetzt $P' \equiv R \equiv (X, Y)$ und $P'' \equiv (\xi', 0)$. Nach (20) lautet dann die Gleichung der Singulärlinie, die durch P' und P'' hindurchgeht,

$$\begin{aligned} \kappa_{12} \left[2 \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi'}{h_1} - \operatorname{arctg} \frac{2h_1(c_1 - X)}{h_1^2 - (c_1 - X)^2 - Y^2} - \pi Z_1 \left(\frac{c_1 - X}{h_1 - Y} \right) + \pi W_1 \right] + \\ + 2 \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi'}{h_2} - \operatorname{arctg} \frac{2h_2(c_2 - X)}{h_2^2 - (c_2 - X)^2 - Y^2} - \pi Z_2 \left(\frac{c_2 - X}{h_2 - Y} \right) + \pi W_2 = 0. \end{aligned} \quad (98)$$

Wenn wir $\chi_{12}\kappa_{12} + 1 = A \neq 0$ setzen, so erhalten wir aus (93) und (71)

$$\begin{aligned} c_1 - X &= -c_2 \frac{2\chi_{12}\chi_{12}}{A}; \quad c_2 - X = c_2 \frac{2}{A}; \\ h_1^2 - (c_1 - X)^2 - Y^2 &= \chi_{12}\chi_{12} (h_1^2 - h_2^2 - c_{21}^2) A^{-1}; \\ h_2^2 - (c_2 - X)^2 - Y^2 &= (h_2^2 - h_1^2 - c_{21}^2) A^{-1}; \\ \frac{2h_1(c_1 - X)}{h_1^2 - (c_1 - X)^2 - Y^2} &= \frac{c_{21}}{h_2p - h_1}; \quad \frac{2h_2(c_2 - X)}{h_2^2 - (c_2 - X)^2 - Y^2} = \frac{c_{21}}{h_2 - h_1p}. \end{aligned} \quad (99)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke können wir (98) in der Form

$$\begin{aligned} & \kappa_{12} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{c_1 - \xi'}{h_1} - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1} - \pi Z_1 + \pi W_1 \right) + \\ & + 2 \operatorname{arctg} \frac{c_2 - \xi'}{h_2} - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1 p} - \pi Z_2 + \pi W_2 = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

schreiben. Bezeichnen wir jetzt den Punkt P' im Fall $\xi' = \pm \infty$ mit $P'_{+\infty}$ bzw. $P'_{-\infty}$. Eine Feldlinie geht durch P'' und $P'_{+\infty}$ (bzw. durch P'' und $P'_{-\infty}$), wenn κ_{12} den Grenzwert κ_{12gr} besitzt, wobei

$$\kappa_{12gr} \left(-\pi - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1} - \pi Z_1 + \pi W_1' \right) - \pi - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 - h_1 p} - \pi Z_2 + \pi W_2' = 0, \quad (101)$$

$$\kappa_{12gr} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1} - \pi Z_1 + \pi W_1'' \right) + \pi - \operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 - h_1 p} - \pi Z_2 + \pi W_2'' = 0. \quad (102)$$

Es folgt daraus der Wert

$$\kappa_{12gr} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_1 p - h_2} + \pi S_2}{\operatorname{arctg} \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1} + \pi S_1};$$

wobei für $\xi' = +\infty$ $S_1 = 1 + Z_1 - W_1'$; $S_2 = -1 - Z_2 + W_2'$,

für $\xi' = -\infty$ $S_1 = -1 + Z_1 - W_1''$; $S_2 = 1 - Z_2 + W_2''$.

Wir behaupten, daß die Zahlen S_1, S_2 die gleichen bleiben, unabhängig davon, ob $\xi' = +\infty$ oder $-\infty$ ist, und beschränken uns zunächst auf die Annahme $h_1 > h_2$ (Bild 21).

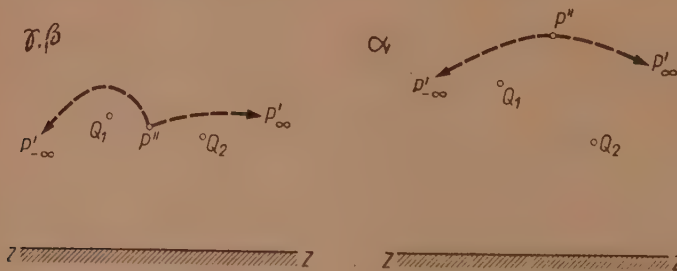


Bild 21. Hilfszeichnung zu den Gleichungen (100) bis (105).

Im Fall $Y > h_1 > h_2$, $h_1^2 < h_2^2 + c_{21}^2$ finden wir

$$\frac{(c_1 - X)^2}{h_1^2 - Y^2} < 1; \quad Z_1 \left(\frac{c_1 - X}{h_1 - Y} \right) = 0; \quad \frac{(c_2 - X)^2}{h_2^2 - Y^2} < 1; \quad Z_2 \left(\frac{c_2 - X}{h_2 - Y} \right) = 0;$$

für $\xi' = +\infty$ ist $W_1' = W_2' = 1$; $S_1 = 0$; $S_2 = 0$,

für $\xi' = -\infty$ ist $W_1' = W_2' = -1$; $S_1 = 0$; $S_2 = 0$.

In den Fällen $Y \leq h_1 > h_2$, $h_1^2 < h_2^2 + c_{21}^2$ ist auf Grund von (99) u. (91)

$$\frac{(c_1 - X)^2}{h_1^2 - Y^2} > 1; \quad \frac{c_1 - X}{h_1 - Y} < 0; \quad Z_1 \left(\frac{c_1 - X}{h_1 - Y} \right) = -1; \quad \frac{(c_2 - X)^2}{h_2^2 - Y^2} < 1; \quad Z_2 = 0;$$

für $\xi' = +\infty$ ist $W_1' = 0$; $W_2' = 1$; $S_1 = 0$; $S_2 = 0$;

für $\xi' = -\infty$ ist (Gleichung 91) $W_1' = -2$; $W_2' = -1$; $S_1 = 0$; $S_2 = 0$

Ist aber $Y < h_1$, $h_1^2 > h_2^2 + c_{21}^2$, so erhalten wir auf dieselbe Weise $Z_1 = Z_2 = 0$ und für $\xi' = \pm\infty$; $S_1 = 1$; $S_2 = 0$. Auf ähnliche Art können wir unsere Behauptung in anderen Fällen beweisen und erhalten nach Durchführung dieser Rechnungen

$$\kappa_{12gr} = \frac{\arctg \frac{c_{21}}{h_1 p - h_2}}{\arctg \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1} + \pi} \quad \text{wenn } h_1^2 > h_2^2 + c_{21}^2; \quad (103)$$

$$\kappa_{12gr} = \frac{\arctg \frac{c_{21}}{h_1 p - h_2} + \pi}{\arctg \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1}} \quad \text{wenn } h_2^2 > h_1^2 + c_{21}^2; \quad (104)$$

in allen anderen Fällen

$$\kappa_{12gr} = \frac{\arctg \frac{c_{21}}{h_1 p - h_2}}{\arctg \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1}}. \quad (105)$$

In (103) ist der Zähler positiv, der Nenner aber der Gl. (96) zufolge negativ; verkleinern wir in (103) h_1^2 bis zum Wert $h_2^2 + c_{21}^2$, so strebt

$\arctg \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1}$ zu $-\pi/2$. Wir erhalten somit

$$\kappa_{12gr} = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{h_2}{c_{21}} \quad \text{für } h_1^2 = h_2^2 + c_{21}^2. \quad (106)$$

In (104) ist der Nenner positiv, der Zähler aber nach (97) negativ; ähnlich wie oben erhalten wir

$$\kappa_{12gr} = \frac{\pi}{2 \arctg \frac{h_2}{c_{21}}} \quad \text{für } h_2^2 = h_1^2 + c_{21}^2. \quad (107)$$

Es ist schließlich $\kappa_{12gr} = 1$ für $h_1 = h_2$.

(108)

Aus dem oben Gesagten folgt, daß stets $\kappa_{12gr} > 0$ ist.

c. Klassifizierung der Felder

Die Feldstruktur hängt bei $\kappa_{12} > 0$ (ebenso wie im Fall $\kappa_{12} < 0$, siehe Bild 16 und 17 wie auch Bild 6 in [1]) vom Wert κ_{12} ab. Ist $\kappa_{12} > \kappa_{12gr}$

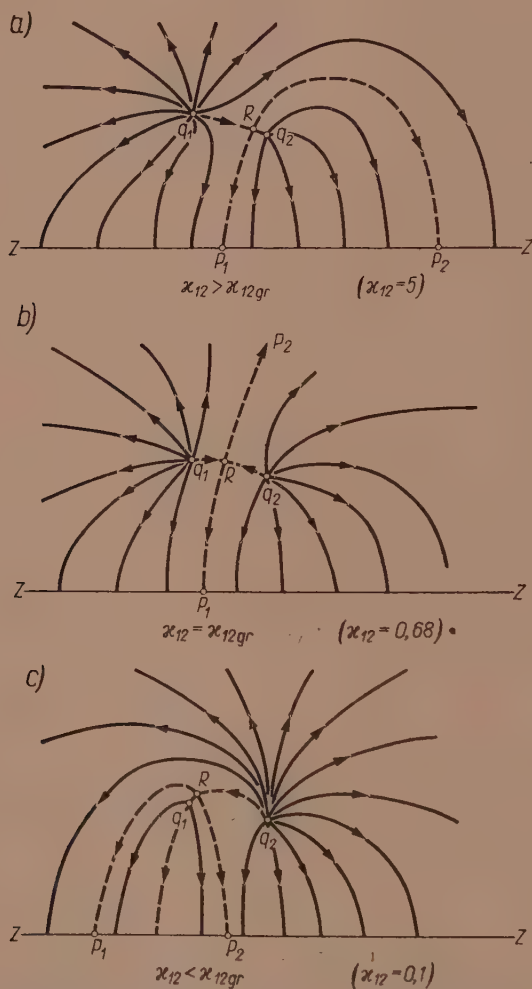


Bild 22. Charakteristische Feldformen bei $\kappa_{12} > 0$.

so bestehen auf $Z-Z$ 2 Trennpunkte P_1, P_2 (siehe das schematische Bild 22a); dabei wird der Fluß der Ladung Q_2 vom Fluß der Ladung Q_1 umgeben. Eine ähnliche Situation entsteht, wenn $\kappa_{12} < \kappa_{12gr}$ (Bild 22c)

nur ist dann der Fluß Q_1 vom Fluß Q_2 umgeben. Im Fall $\kappa_{12} = \kappa_{12gr}$ (Bild 22b) besteht auf $Z-Z$ nur ein Trennpunkt P_1 und die Grenzlinie, die durch P_1 hindurchgeht, trennt die beiden Flüsse Q_1 und Q_2 voneinander.

Die Lage der Trennpunkte im Bild 22 a und c wird mittels (100) bestimmt; für die beiden Wege RP_1 und RP_2 erhält man 2 Werte W_1 und W_2 und so läßt sich sowohl P_1 wie auch P_2 bestimmen. Im Falle des Bildes 22 b ist im Endlichen nur ein Trennpunkt P_1 vorhanden, die Trennlinie durch P_1 läuft zur Unendlichkeit. Die Lage von P_1 kann dann ebenfalls aus der Gl. (100) (in welche man $\kappa = \kappa_{12gr}$ einsetzt) berechnet werden, bequemer ist es jedoch, die Gleichungen (30) oder (31) aus [1] zu benützen; die Anwendbarkeit dieser Gleichungen folgt daraus, daß in diesem Fall Q_1 der Fluß durch $P_{-\infty}P_1$ und Q_2 der Fluß durch $P_1P_{+\infty}$ ist. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\kappa_{12gr} \operatorname{arctg} \frac{\xi' - c_1}{h_1} + \operatorname{arctg} \frac{\xi' - c_2}{h_2} = \frac{\pi}{2} (\kappa_{12gr} - 1), \quad (109)$$

woraus man die Abszisse ξ von P_1 berechnen kann. (109) kann man auch erhalten, wenn man (101) oder (102) von (100) abzieht.

Bild 23/a, β , γ , δ dient zur Bestätigung unserer obigen Ausführungen; darin sind $P'_a \equiv (x_1, 0)$ und $P'_b \equiv (x_2, 0)$ Trennpunkte; $R \equiv P''$; $Q_1 P'' P'_a$, $Q_1 P'' P'_b$, $Q_2 P'' P'_a$ und $Q_2 P'' P'_b$ sind Singulärlinien, deren Teile $P'_a P''$ und $P'_b P''$ mit a bzw. b bezeichnet werden. Die Gl. (100) wird zunächst dem Weg a und nachher dem Weg b angepaßt, worauf man von der ersten erhaltenen Gleichung die andere abzieht. Das Resultat kann man in der Form

$$\frac{Q_1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_1}{h_1} - \operatorname{arctg} \frac{c_1 - x_2}{h_1} \right) + \frac{Q_2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_2 - x_1}{h_2} - \operatorname{arctg} \frac{c_2 - x_2}{h_2} \right) = T \quad (110)$$

schreiben, wobei

$$T = \frac{1}{2} Q_1 (W_{1b} - W_{1a}) + \frac{1}{2} Q_2 (W_{2b} - W_{2a}).$$

Die linke Seite von (110) ist für alle Fälle a bis δ (Bild 23) dieselbe; nach der Gl. (31) in [1] ist sie dem Fluß durch die Strecke $P'_a P'_b$ gleich; die Werte W sind jedoch für jeden Einzelfall anders; sie sind in der Zahlentafel 3 enthalten (berechnet mittels Bild 4 und Gl. 91). Setzt man die Werte von T in (110) ein, so erlangt man Übereinstimmung mit den früheren Behauptungen (s. auch Beisp. 3).

Zahlenbeispiel 3a. Gegeben sind $h_1 = 1000$; $h_2 = 1200$; $c_{21} = 200$.

Werte von W und T für die Wege α und b in Bild 23/ α bis δ

Bild 23	W_{1a}	W_{1b}	W_{2a}	W_{2b}	$\frac{Q_1}{2}(W_{1b}-W_{1a})$	$\frac{Q_2}{2}(W_{2b}-W_{2a})$	T
α	0	0	-1	1	0	Q_2	Q_2
β	1	1	-1	1	0	Q_2	Q_2
γ	-2	0	-1	-1	Q_1	0	Q_1
δ	-1	1	-1	-1	Q_1	0	Q_1

Es ist die Lage der Singulärlinie für $\kappa = \kappa_{gr}$ zu bestimmen sowie die Trennpunkte P_a, P_b (Bild 23) für Werte, die etwas größer und etwas kleiner als κ_{gr} sind.

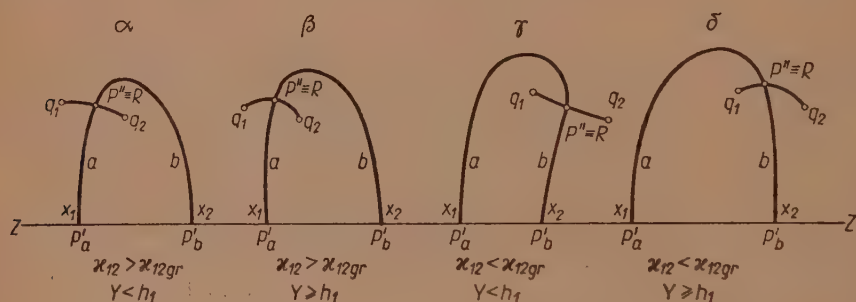


Bild 23. Hilfszeichnung zu Gleichung (110) und Zahlentafel 3.

$$(72): p = \frac{31}{30}; \quad \arctg \frac{c_{21}}{h_1 p - h_2} = -50^\circ 11' 40''; \quad \arctg \frac{c_{21}}{h_2 p - h_1} = 39^\circ 48' 20'';$$

$$(104): \kappa_{gr} = 3,261; \quad (93): X = 46,2; \quad (72): A = 18,3735; \quad (71): Y = 1153,4$$

Die Abszisse ξ' des Trennpunktes P_E auf $Z-Z$ ergibt sich aus (109)

$$3,261 \arctg \left(0,2 + 1,2 \frac{\xi' - 100}{1200} \right) + \arctg \frac{\xi' - 100}{1200} = 203,49; \quad \xi' = 1100,0.$$

Der Winkel λ_R , den die Tangente zur Feldlinie $Q_1 R Q_2$ in R mit der Waagerechten bildet (Bild 24):

$$(65): h_1 p_1 = 1019,42; \quad h_2 p_2 = 1202,21; \quad (76): \lambda_R = 42^\circ 30'$$

$Q_1 R Q_2$ ist nach oben hin konvex; die zweite Singulärlinie, die durch R hindurchgeht, bildet mit der Horizontalen den Winkel $90^\circ - 42^\circ 30'$. Wir werden jetzt die Schnittpunkte dieser Linien mit den Geraden

A) $\xi = c_1 = -100$; B) $\xi = c_2 = 100$; C) $\xi = 500$; D) $\xi = 800$ berechnen.
 Punkt P_A . $W_1 = 0$; $W_2 = 1$; $Z_2 = 0$; $\alpha_2'' = 48^\circ 53' 0''$; $\beta_2'' = 1^\circ 18' 34''$;
 $\alpha_1'' = 43^\circ 41' 36''$; $\beta_1'' = -3^\circ 53' 10''$; (36): $\tau = 0$; $\eta' = \infty$. P liegt in ∞ .
 Punkt P_B . $W_1 = 0$; $W_2 = 0$; $Z_1 = 0$; (38): $\tau = 55^\circ 11' 57''$; $\eta' = 1112$.
 Punkt P_C . $W_1 = 1$; $W_2 = 0$; $Z_1 = -1$; $Z_2 = 0$; $\alpha_1'' = 43^\circ 41' 36''$;
 $\beta_1'' = -3^\circ 53' 10''$; $\alpha_2'' = 48^\circ 53' 0''$; $\beta_2'' = 1^\circ 18' 34''$; $\tau = -180,1841$;

$$(27): 3,261 \arctg \frac{120}{10^{-4} \cdot \eta'^2 - 64} - \arctg \frac{96}{128 - 10^{-4} \cdot \eta'^2} = 180,1841; \quad \eta' = 961,9.$$

Punkt P_D . $W_1 = 1$; $W_2 = 0$; $Z_1 = -1$; $Z_2 = 0$;

$$(27): 3,261 \arctg \frac{180}{10^{-4} \cdot \eta'^2 - 19} - \arctg \frac{168}{95 - 10^{-4} \cdot \eta'^2} = 180,1841; \quad \eta' = 740,7.$$

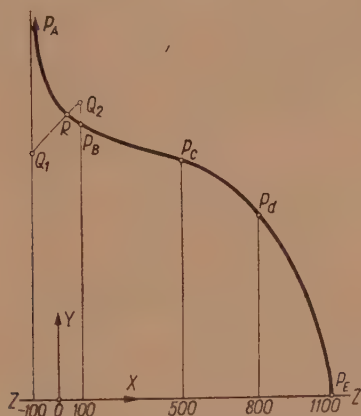


Bild 24. Konstruktion der Trennlinie für Zahnbeispiel 3.

Da nunmehr die Lage der Punkte $P_A, R, P_B, P_C, P_D, P_E$ sowie die Winkel in R und P_E bekannt sind, können wir mit ziemlicher Genauigkeit den Verlauf der Trennlinie skizzieren (Bild 24). Wir berechnen noch die Punkte $P'_a P'_b$ (Bild 23), die den Werten $\kappa_{12} = 3,2$ und $\kappa_{12} = 3,3$ entsprechen

$$\kappa_{12} = 3,2; \quad (93): X = 45,45; \quad (71): A = 17,8533; \quad Y = 1152,4.$$

Punkt P'_a . $Z_1 = 0$; $Z_2 = 0$; $W_1 = -1$; $W_2 = 0$;

$$3,2 \arctg \left(1,2 \frac{100 - \xi'}{1200} - 0,2 \right) + \arctg \frac{100 - \xi'}{1200} = 376,7861; \quad \xi' = -241100.$$

Punkt P'_b . $Z_1 = 0$; $Z_2 = 0$; $W_1 = 1$; $W_2 = 0$;

$$3,2 \arctg \left(0,2 + 1,2 \frac{\xi' - 100}{1200} \right) + \arctg \frac{\xi' - 100}{1200} = 199,2039; \quad \xi' = 1088,2$$

$$\kappa_{12} = 3,3; \quad X = 46,67; \quad A = 18,71; \quad Y = 1153,47.$$

Punkt P'_a . $Z_1 = Z_2 = 0$; $W_1 = 1$; $W_2 = 0$; $\xi' = 1107,4$.

Punkt P'_b . $Z_1 = Z_2 = 0$; $W_1 = 1$; $W_2 = 2$, $\xi' = 420100$.

d. Gleichgewichtspunkt auf einer Leitung

Am Anfang von Pkt. 6a wurde erwähnt, daß bei großem $|x_{12}|$ der theoretische Wert von $X \approx \pm \frac{1}{2} c_{21}$, ist, d. h. daß der Gleichgewichtspunkt R nahe an einer der beiden Leitungen gelegen ist. In diesen Fällen ist nicht mehr zulässig, diese Leitung als eine Punktquelle aufzufassen und die Gleichungen (69) und (70) zu benützen; man muß vielmehr den Querschnitt dieser Leitung berücksichtigen, der ein Kreis mit Halbmesser r_0 ist. Wir wollen nun untersuchen, für welche Ladungen oder Potentiale diese hier geschilderten Umstände zutreffen oder wann sich R auf der Leitungsoberfläche (z. B. auf der Oberfläche der Leitung 2.) befindet. Dabei können wir die Ladungen Q_1 , $-Q_1$ (Spiegelbild von Q_1) und $-Q_2$ (Spiegelbild von Q_2) als Punktladungen betrachten, da sie in relativ großer Entfernung von R und $C_2 \equiv (c_2, h_2)$ liegen. Auf Grund von (60), (59), (61) ist die Feldstärke K' , die in R durch Q_1 und $-Q_1$ hervorgerufen ist

$$K' = \frac{Q_1 h_1}{\pi \epsilon a_1 b_1}; \quad a_1^2 = (h_1 - h_2)^2 + c_{21}^2; \quad b_1^2 = (h_1 + h_2)^2 + c_{21}^2.$$

Mittels (64) berechnen wir die Komponenten von K'

$$K'_x = \frac{2h_1 h_2 c_{21}}{\pi \epsilon a_1^2 b_1^2} Q_1; \quad K'_y = \frac{h_1 (h_2^2 - h_1^2 - c_{21}^2)}{\pi \epsilon a_1^2 b_1^2} Q_1.$$

Die Komponenten der Feldstärke K'' , die in R von $-Q_2$ erzeugt wird, sind

$$K'_x = 0; \quad K'_y = -\frac{Q_2}{4\pi \epsilon h_2}.$$

Wir erhalten daraus die Komponenten der effektiven Feldstärke $\bar{K}$ in R (erzeugt von Q_1 , $-Q_1$ und $-Q_2$)

$$K_x = \frac{2h_1 h_2 c_{21}}{\pi \epsilon a_1^2 b_1^2} Q_1; \quad K_y = \frac{Q_1 h_1 (h_2^2 - h_1^2 - c_{21}^2)}{\pi \epsilon a_1^2 b_1^2} - \frac{Q_2}{4\pi \epsilon h_2}.$$

$\bar{K}$ bildet mit der Waagerechten den Winkel

$$\mu = \arctg \frac{K_y}{K_x}.$$

Nachdem R sich auf dem Kreisumfang mit dem Zentrum C_2 befindet, so hat die Feldstärke $\bar{K}_2^*$, die in R von Q_2 erzeugt wird, die radiale Richtung; auch für die durch μ gegebene Richtung ist

$$K_2^* = \frac{Q_2}{2\pi \epsilon r_0}.$$

R befindet sich nicht außerhalb der Leitung 2, wenn $K \geq K^*$, also wenn

$$\frac{Q_1^2 h_1^2 (h_2^2 - h_1^2 - c_{21}^2)^2}{a_1^4 b_1^4} + \frac{Q_2^2}{16 h_2^2} - \frac{2 Q_1 Q_2 h_1 (h_2^2 - h_1^2 - c_{21}^2)}{4 a_1^2 b_1^2 h_2} + \frac{Q_1^4 4 h_1^2 h_2^2 c_{21}^2}{a_1^4 b_1^4} \geq \frac{Q_2^2}{4 r_0^2}.$$

Diese Ungleichung läßt sich wie folgt umformen

$$\kappa_{12}^2 - 2 \kappa_{12} (\chi_{12} - p) - \frac{4 h_2^2 - r_0^2}{16 r_0^2} \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{h_1^2 h_2^2} \geq 0.$$

Das gesuchte Kriterium lautet somit

$$\kappa_{12} \geq \sigma_2 \quad (111)$$

wobei

$$\sigma_2 = \chi_{12} - p + \sqrt{(\chi_{12} - p)^2 + \frac{4 h_2^2 - r_0^2}{4 r_0} (p^2 - 1)}. \quad (112)$$

Die zweite Wurzel kommt nicht in Betracht, da

$$4 h_2^2 \gg r_0^2 \quad \text{und} \quad \frac{4 h_2^2 - r_0^2}{4 r_0} (p^2 - 1) \gg (\chi_{12} - p)^2.$$

Es gilt somit angenähert

$$\sigma_2 \approx \frac{h_2}{r_0} \sqrt{p^2 - 1}. \quad (113)$$

Die Beziehung (113) kann man unmittelbar erhalten, wenn man die Feldstärke, die von der entfernten Ladung $-Q_2$ in R erzeugt wird, nicht berücksichtigt.

Analogerweise kann man behaupten, daß R nicht außerhalb der Leitung 1 liegt, wenn

$$\kappa_{21} \geq \sigma_1; \quad \sigma_1 \approx \frac{h_1}{r_0} \sqrt{p^2 - 1}.$$

Aus Gl. (50) in [1] folgt, daß man anstatt (111) auch

$$\frac{\gamma_{22} V_1 - \gamma_{11} V_2}{\gamma_{11} V_2 - \gamma_{12} V_1} \geq \sigma_2$$

schreiben kann; gemäß (92) folgt daraus

$$\frac{V_1}{V_2} \geq \frac{\sigma_2 \gamma_{11} + \gamma_{12}}{\sigma_2 \gamma_{12} + \gamma_{22}}. \quad (114)$$

Die rechte Seite von (114) ist kleiner als der Grenzwert γ_{11}/γ_{12} , jedoch ist der Unterschied nicht bedeutend, da σ_2 eine große Zahl ist. In der Praxis sind die Werte von V_1 und V_2 , die der Bedingung (114) entsprechen, verhältnismäßig groß.

Beispiel 4.

Für die Angaben des Beispiels 2 in [1] sind σ_2 und die entsprechenden Werte V_1 , V_2 nach (114) zu berechnen.

Es ist somit

$$h_1 = h_2 = 10000 \text{ mm}; \quad c_{21} = 2000 \text{ mm}; \quad r_0 = 4,05 \text{ mm}; \quad p = 1,02;$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 153,085 \frac{\text{km}}{\mu\text{F}}; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 41,536 \frac{\text{km}}{\mu\text{F}}.$$

Aus (112) und (113) folgt $\sigma_2 \approx 494$; dem Wert $\kappa_{12} = \sigma_2$ entspricht das Verhältnis $V_1/V_2 = 3,66$ und für $u = 15 \text{ kV}$ erhalten wir $V_1 = 20637 \text{ V}$;

$V_2 = 5638 \text{ V}$. Der Grenzwert von V_1/V_2 beträgt $\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} = 3,686$.

7. Beispiele zur Lagebestimmung von Feldröhren

a) Beispiel 5.

Das Feld der Doppelleitung mit Daten wie im Beisp. 4 und $V_1 = 7000 \text{ V}$, $V_2 = -8000 \text{ V}$. Aus Zahlentafel 3 in [1] (S. 382) finden wir, daß in diesem Fall $Q_1 = 64,666 \mu\text{C/km}$; $Q_2 = -69,804 \mu\text{C/km}$; (23): $k = -\kappa_{12} = 0,9264$.

1) Gleichgewichtspunkte R_1 , R_2 . Aus (72) folgt $p = 1,02$, $A = -0,1779$; daraus geht hervor, daß auf $Z-Z$ sich 2 Gleichgewichtspunkte befinden, deren Lage nach (17) und (18) in [1] ist $R_1 \equiv (-5034,1; 0)$; $R_2 \equiv (-200,7; 0)$. (Zahlen in cm).

2) Winkel, die in den Punkten Q_1 und Q_2 von der Waagerechten mit durch R_1 , R_2 hindurchgehenden Feldlinien gebildet werden.

Feldlinie $R_1 \rightarrow Q_1$. Aus Bild 6a entnehmen wir, daß $\delta'_1 = 90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$.

Aus (46) und (48) finden wir $\gamma'_1 = 0^\circ 6' 17''$.

Feldlinie $R_1 \rightarrow Q_2$. Aus Bild 4b entnehmen wir, daß $\alpha''_1 = 90^\circ$ und mit (91): $W_1 = -1 + 0$; $W_2 = -1 + 0$. Aus (41) und (43) folgt dann $\alpha''_2 = 77^\circ 16' 9''$; $\gamma''_2 = 12^\circ 43' 51''$.

Feldlinie $R_2 \rightarrow Q_1$. Aus Bild 6c folgt $\delta''_1 = 90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$ und aus (46) und (48) erhält man $\gamma'_1 = 11^\circ 18' 54''$.

Feldlinie $R_2 \rightarrow Q_2$. Aus Bild 6a, (42) und (44) folgt $\delta'_2 = -90^\circ$; $W_1 = W_2 = 2$; $\gamma''_2 = -24^\circ 9' 5''$.

3) Winkel im Punkt Q_2 , gebildet durch die Waagrechte und die zur ∞ führende Feldlinie. Aus Bild 6a und (54) erhalten wir $\delta'_2 = -90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$; $\gamma''_2 = 11^\circ 54' 51''$.

4) Die Flüsse, die durch die Strecken $-\infty \div R_1$, $R_1 \div R_2$, $R_2 \div +\infty$ hindurchgehen, sind bereits in [1] berechnet worden (Zahlentafel 3). Sie betragen der Reihe nach 0,158; 2,014; 6,993 $\mu\text{C/km}$.

5) Röhren-Grenzlinien. Den Fluß φ der einzelnen Röhren setzen wir $=5\text{ }\mu\text{C/km}$. Außer diesen „normalen“ Röhren werden wir hier noch „unvollständige“ Röhren vorfinden, deren Fluß etwas kleiner, bzw. solche, deren Fluß etwas größer ist. Eine normale Röhre entspricht auf der Leitung 1. einem Zentralwinkel $27^{\circ}50'5''$, auf der Leitung 2. einem Winkel von $25^{\circ}47'11''$. Die Grenzlinien auf Leitung 1. werden wir mit Nr. 1—13, diejenigen auf Leitung 2 mit Nr. 1—14 bezeichnen. Mit Nr. 1 bezeichnen wir die Linie $Q_1 \rightarrow R_2 \rightarrow Q_2$; ebenso entsprechen einander die weiteren Linien Nr. 2—13, die Q_1 und Q_2 verbinden; die Lage dieser Linien kann nunmehr festgestellt werden Die Röhre 7/8 (begrenzt durch die Linien 7 und 8) führt den Fluß $4,804\text{ }\mu\text{C/km}$, was auf Leitung 1. dem Zentralwinkel $24^{\circ}46'50''$, auf Leitung 2. dem Winkel $26^{\circ}45'1''$ entspricht. Auf Leitung 1. ergibt sich noch eine unvollständige Röhre und zwar die Röhre $^{13}/_1$; ihr Fluß beträgt $4,682$, was dem Zentralwinkel $27^{\circ}44''$ entspricht. Es ergibt sich nun folgende Zusammenstellung der auf beiden Leitungen mündenden Röhren:

Leitung 1.			Leitung 2.		
Röhren-Anzahl	Gesamtfluß	Zentralwinkel	Röhren-Anzahl	Gesamtfluß	Zentralwinkel
11	55	$306^{\circ}10'55''$	13	65	$335^{\circ}13'10''$
1	4,805	$26^{\circ}45'1''$	1	4,805	$24^{\circ}46'50''$
1	4,862	$27^{\circ}44'4''$			
64,667		360°	69,805		360°

Zahlentafel 4

Die den einzelnen Feldlinien entsprechenden Zentralwinkel γ_1 und γ_2 .

Feldlinie Nr	Leitung 1		Leitung 2		Bemerkungen
	γ_1	Quadrant	γ_2	Quadrant	
1	$11^{\circ}18'54''$	III	$24^{\circ}9'5''$	IV	Feldlinie $1-R_2-2$
2	$39^{\circ}8'59''$	„	$-49^{\circ}56'15''$	„	Feldlinie von 1 zu 2
3	$66^{\circ}59'4''$	„	$-75^{\circ}43'25''$	„	„
4	$-85^{\circ}10'51''$	IV	$78^{\circ}29'25''$	III	„
5	$-57^{\circ}20'46''$	„	$52^{\circ}42'15''$	„	„
6	$-29^{\circ}30'41''$	„	$26^{\circ}55'5''$	„	„
7	$-1^{\circ}40'36''$	„	$1^{\circ}7'55''$	„	„
8	$25^{\circ}4'25''$	I	$-23^{\circ}38'55''$	II	„
9	$52^{\circ}54'30''$	„	$-49^{\circ}26'5''$	„	„
10	$80^{\circ}44'35''$	„	$-75^{\circ}13'15''$	„	„
11	$-71^{\circ}25'20''$	II	$78^{\circ}59'35''$	I	„
12	$-43^{\circ}35'15''$	„	$53^{\circ}12'25''$	„	„
13	$-15^{\circ}45'10''$	„	$27^{\circ}25'15''$	„	„
13a	$0^{\circ}6'17''$	III	$12^{\circ}43'51''$	I	Feldlinie $1-R_1-2$
			$11^{\circ}54'51''$	„	„ $2-\infty$
14			$1^{\circ}38'5''$	„	„ von 2 zur Erde
1	$11^{\circ}18'54''$	„	$24^{\circ}9'5''$	IV	„ durch R_2

Bemerkung. Die Feldlinien $Q_1R_1\infty$ und $2-R_1$ sind hier keine Grenzlinien.

6. Probe.

Nachrechnung der Winkel γ'_1 und γ''_2 z. B. bei Feldlinie Nr. 1.

Bild 6a: $\delta'_1 = 90^\circ$; $\delta''_2 = -90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$. Setzen wir $\gamma''_2 = -24^\circ 9' 15''$, so erhalten wir aus (56) $\gamma'_1 = 11^\circ 18' 50''$. Setzen wir (Feldlinie Nr. 13a) $\gamma'_2 = 12^\circ 43' 51''$, so erhalten wir $\delta'_1 = -\delta''_2 = 90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$ und $\gamma'_1 = 6^\circ 16''$.

Nachrechnung der Flüsse. Dem Fluß $\psi'_{-\infty}$ entspricht auf der Leitung 2 der Zentralwinkel $12^\circ 43' 51'' - 11^\circ 54' 51'' = 2940''$; ebenso entspricht dem Fluß ψ auf Leitung 1 der Winkel $40351''$ und dem Fluß ψ'_{∞} auf Leitung 2 der Winkel $129836''$. Nachdem dem Zentralwinkel $1''$ auf Leitung 1 der Fluß $64,666 : 360^2 = 49,8966 \cdot 10^{-6} \mu\text{C/km}$, auf der Leitung 2 der Fluß $53,8611 \cdot 10^{-6} \mu\text{C/km}$ entspricht, errechnet man hieraus die folgenden Werte: $\psi'_{-\infty} = 2940 \cdot 53,8611 \cdot 10^{-6} = 0,1586$; $\psi = 40351 \cdot 49,8966 \cdot 10^{-6} = 2,0134$; $\psi'_{\infty} = 6,9931$, was mit den Angaben in 4 übereinstimmt.

7) Konstruktionsdetails. Um die Linien Nr. 1 bis 13 besser zeichnen zu können, berechnen wir nach (49), (51) und (52) ihre Schnittpunkte mit $\xi = 0$. Die erhaltenen Werte von η' sind in der Zahlentafel 5 enthalten.

Zahlentafel 5

Hilfsrechnung zum Beispiel 5/7

Feldlinie Nr	μ°	$\frac{\tau}{1+k}$	η'
1	-34,1820	$11^\circ 50' 41''$	190,7
2	-20,7906	$25^\circ 14' 10''$	752,1
3	-7,4109	$38^\circ 36' 57''$	860,0
4	5,9747	$52^\circ 0' 5''$	913,1
5	19,3603	$65^\circ 23' 13''$	947,8
6	32,7458	$78^\circ 46' 21''$	974,8
7	46,1314	$92^\circ 9' 29''$	998,8
8	-34,4430	$-74^\circ 58' 38''$	1021,6
9	-21,0574	$-61^\circ 35' 32''$	1047,9
10	-7,6675	$-48^\circ 12' 06''$	1080,7
11	5,7137	$-34^\circ 49' 14''$	1130,3
12	19,0993	$-21^\circ 26' 38''$	1224,4
13	32,4849	$-8^\circ 3' 29''$	1550,0

Für alle Feldlinien ist $W_1 = W_2 = 0$, für die Linien 1 bis 7 ist $\alpha''_1 = -90^\circ$; $\lambda = 46,0266$, für die Linien 8 bis 13: $\alpha''_1 = 90^\circ$; $\lambda = -40,5343$. Für die Linie Nr 7 ist $Z = 1$, für alle anderen $Z = 0$. Schnittpunkt der Linie Nr 14 mit $\eta = 0$. Ausgangsgröße der Berechnung ist Winkel $\gamma''_2 = 1^\circ 38' 51''$ (in Q_2). Aus Bild 6b erhalten wir $\delta''_2 = -90^\circ$, $W_1 = W_2 = 0$. (42) liefert die Gleichung $0,9264 \arctg \frac{1000}{100 + \xi'} + \arctg \frac{1000}{100 - \xi'} = -10^\circ 16' 46''$, woraus $\xi' = 827,6$ folgt.

Schnittpunkt der Linie Nr 1 ($\equiv Q_2 R_2$) mit $\xi' = -100$. Es ist hier $W_1 = W_2 = 0$; $Z = 0$ und auf Grund von (36), (37): $\tau = 22^\circ 49' 3''$; $\eta' = 96,2$. Für den Schnittpunkt derselben Linie mit $\xi' = 100$ erhalten wir auf ähnliche Weise $\tau = 24^\circ 37' 51''$; $\eta' = 295,9$. Schnittpunkt der Linie $R_1 Q_2$ mit $\xi' = -100$. Es ist hier $W_1 = W_2 = 1$; $Z_2 = 0$ und aus (36), (37): $\tau = -0^\circ 48' 59''$; $\eta' = 5388$.

Auf Bild 25 sind die Linien 1 ÷ 14 eingezeichnet.

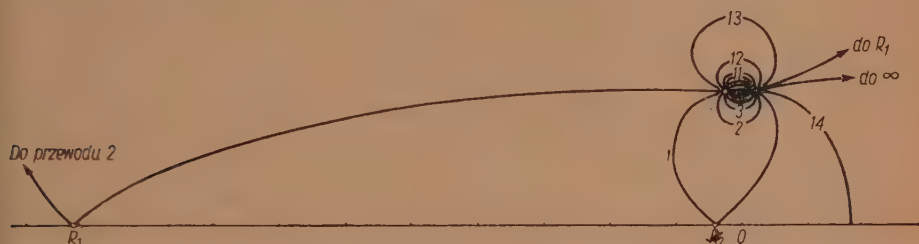


Bild 25. Feldröhren mit dem Fluß $5 \mu\text{C}\cdot\text{km}$ in einem Feld mit den Parametern $h_1 = h_2 = 1000 \text{ cm}$, $c_{21} = 200 \text{ cm}$; $V_1 = 7000 \text{ V}$; $V_2 = -8000 \text{ V}$.

b. Beispiel 6.

Das Feld mit den Parametern wie im Beispiel 4 und $V_1 = 5000 \text{ V}$; $V_2 = -10000 \text{ V}$. Aus den Formeln in [1] (S. 380) finden wir $Q_1 = 54,389$; $Q_2 = -80,080 \mu\text{C}/\text{km}$; $k = -\kappa_{12} = 0,6792$.

1. Gleichgewichtspunkt R. (72) ergibt: $A = 0,07576 > 0$, somit existiert hier nur ein Gleichgewichtspunkt im Raum E (Pkt. 4. b). Aus (69) und (71) folgt $X = -523,4$; $Y = 857,9$.

2. Trennpunkt P auf $Z-Z$ liegt auf der Linie $Q_1 R$. (20): $W_1 = W_2 = 0$; (39): $\tau = -19^\circ, 2315$.

(24): $0,6792 \arctg(0,1 + 0,001 \xi') + \arctg(0,001 \xi' - 0,1) = 19,2315$; $\xi' = -1005$.

3. Die von Lotrechten und Feldlinien in C_1 und C_2 gebildeten Winkel. Linie RQ_1 . Bild 6a: $W_1 = W_2 = 0$; $\delta_1'' = 90$; (46) und (48): $\gamma_1'' = 5^\circ 42' 39''$; $\alpha_1'' = 84^\circ 17' 21''$ (dieselbe Linie geht durch den Punkt P). Linie RQ_2 . Unterer Ast. Bild 6a: $\delta_2'' = -90$; $W_1 = W_2 = 2$; $\gamma_2'' = -65^\circ 27' 30''$, $\alpha_2'' = -26^\circ 32' 30''$. Oberer Ast: $\delta_2'' = -90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$; $\alpha_2'' = 57^\circ 14' 52''$.

4. Winkel, den die zur ∞ gehende Feldlinie mit der Lotrechten im Punkt C bildet. $\delta_2'' = -90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$; $\alpha_2'' = 57^\circ 14' 52''$.

5. Flüsse zur Erdoberfläche. Gl. (30) in [1] ergibt: Fluß durch $\xi' = -\infty$ bis $\xi' = -1005$ ist $= -4,290 \mu\text{C}/\text{km}$. Fluß durch $\xi' = -1005$ bis $\xi' = +\infty$ ist somit $= -80,08 + 54,389 + 4,29 = -21,401$.

6. Feldlinien. Den Fluß einer normalen Feldröhre nehmen wir wieder $= 5 \mu\text{C}/\text{km}$ an; diesem Fluß entspricht auf Q_1 der Zentralwinkel $33^\circ 5' 42''$, auf Q_2 der Winkel $22^\circ 28' 35''$. Die Linien PR_1 und PR_2 bezeichnen wir mit Nr 1. Die Winkel der anderen Feldlinien sind in Zahlen-

tafel 6 zusammengestellt. Der unvollständigen Röhre 11/12' entspricht auf Q_1 der Winkel $29^\circ 3' 0''$; sie führt den Fluß $4,389 \mu\text{C}/\text{km}$ und wird in Q_2 von den Linien $\alpha_2'' = 18^\circ 14' 00''$ und $\alpha_2'' = 40^\circ 42' 39''$ begrenzt. Die unvollständige Röhre 17/1 auf Q_2 entspricht dem Zentralwinkel $21' 36''$. Wir erhalten somit folgende Zusammenstellung der Röhrenflüsse:

Leitung 1			Leitung 2		
Röhren- Anzahl	Gesamtfluß	Zentralwinkel	Röhren- Anzahl	Gesamtfluß	Zentralwinkel
10	50	$330^\circ 57' 0''$	16	80	$359^\circ 38' 24''$
1	4,389	$29^\circ 3' 0''$	1	0,08	$21' 36''$
54,389		360°	80,08		360°

7. Feldlinien, die zur Erdoberfläche führen. Für die Feldlinien Nr 13 bis 16 ist (Bild 4a): $\alpha_1' = -90^\circ$; $W_1 = W_2 = 0$; (41) und (43):

$$\arctg(0,1 - 0,001 \xi') + 0,6792 \arctg(0,1 + 0,001 \xi') = \frac{1}{2} \alpha_2'' + 32,50235 = K. \text{ Die}$$

Lösungen dieser Gleichung enthält Zahlentafel 7.

8. Proben. Berechnung der Flüsse der zur Erde führenden Röhren. Aus (31) in [1] folgt:

Fluß durch $\xi' = -1005$ und $\xi' = 93,5$ beträgt $-5,0811$ (Sollwert nach 6 $-5,08$).

Zahlentafel 6

Die den einzelnen Feldwinkeln entsprechenden Zentralwinkel α_1' und α_2''

Feld- linie Nr	Leitung 1		Leitung 2		Bemerkungen
	α_1'	Qua- drant	α_2''	Qua- drant	
1	$84^\circ 17' 20''$	III	$-26^\circ 32' 30''$	IV	Feldlinie 1—R—2
2	$51^\circ 11' 38''$	„	$-4^\circ 3' 51''$	„	Feldlinie von 1 zu 2
3	$18^\circ 5' 56''$	„	$18^\circ 24' 48''$	III	„
4	$-14^\circ 59' 46''$	IV	$40^\circ 53' 27''$	„	„
5	$-48^\circ 5' 28''$	„	$63^\circ 22' 6''$	„	„
6	$-81^\circ 11' 10''$	„	$85^\circ 50' 45''$	„	„
7	$65^\circ 43' 8''$	I	$-71^\circ 40' 36''$	II	„
8	$32^\circ 37' 26''$	„	$-49^\circ 11' 57''$	„	„
9	$-0^\circ 28' 16''$	II	$-26^\circ 43' 18''$	„	„
10	$-33^\circ 33' 58''$	„	$-4^\circ 14' 39''$	„	„
11	$-66^\circ 39' 40''$	„	$18^\circ 14' 00''$	I	„
12'	$84^\circ 17' 20''$	III	$37^\circ 57' 49''$	„	„
12			$40^\circ 42' 39''$	„	„
			$57^\circ 14' 52''$	„	Feldlinie von 2 zu ∞
13			$63^\circ 11' 18''$	„	Feldlinie von 2 zur Erde
14			$85^\circ 39' 57''$	„	„
15			$-71^\circ 51' 24''$	IV	„
16			$-49^\circ 22' 45''$	„	„
17			$-26^\circ 54' 6''$	„	Feldlinie von 2 zu 1
1			$-26^\circ 32' 30''$	„	Feldlinie 2—R—1

Hilfsrechnung zum Beispiel 6/7 Zahlentafel 7

Feld- linie Nr	α_2''	Qua- drant	K	ζ	ξ
13	63°11'18''	I	64,09651	-6,52	6630
14	85°39'57''	„	75,33526	-1,3525	1452,5
15	-71°51'24''	IV	-3,42598	-0,5321	632,1
16	-49°22'45''	„	7,81277	0,006495	93,5
1≡17'	-26°32'30''	„	19,2325	1,105	-1005

Der Fluß durch $\xi' = 93,5$ und $\xi' = 632,1$ beträgt $-4,998$ (Sollwert $-5,0$)
„ „ „ „ 632,1 „ „ 1452,5 „ $-4,9996$ („ $-5,0$)
„ „ „ „ 1452,5 „ „ 6630 „ $-5,0022$ („ $-5,0$)

Nachrechnen der Winkel. Aus (41) oder (55) folgt

$$k\alpha_1' + \alpha_2'' = k\alpha_1'' + \alpha_2' + (1 - k) \arctg 0,1 + \pi (W_2 - kW_1).$$

Da hier $W_1 = W_2 = 0$; $\alpha_1' = -90^\circ$; $\alpha_2' = 90^\circ$, erhalten wir $0,6792 \alpha_1' + \alpha_2'' = 30,7059$; wenn wir hier z. B. $\alpha_2'' = -26^\circ 32' 30''$ einsetzen, so finden wir $\alpha_1' = 84^\circ 17' 20''$ (Zahlentafel 6, Linie Nr. 1).

9. Konstruktionsdetails. Schnittpunkt der Linie Nr 16 mit $\xi' = c_2 = 100$. Es ist hier $W_1 = W_2 = 0$; $\alpha_1' = -90^\circ$; $\alpha_2'' = -49^\circ 22' 45''$; $Z_1 = Z_2 = 0$; (25): $\tau = 23^\circ 0' 24''$; $\eta' = 141,3$. Die Schnittpunkte der Linien 1 bis 12 mit $\xi' = 0$ berechnen wir mittels (49), (51) und (52).

Hilfsrechnung zum Beispiel 6/9 Zahlentafel 8

Feldlinie Nr	μ°	$\tau/1+k^\circ$	η'
1	-15,8063	18,2863	620,3
2	-2,4203	31,6722	816
3	10,9656	45,0582	889,0
4	24,3516	58,4442	931,2
5	37,7376	71,8302	961,4
6	51,1237	85,2162	986,5
7	-42,6855	-76,7781	1018,3
8	-29,2995	-63,3921	1044,1
9	-15,9135	-50,0061	1076,6
10	-2,5275	-36,6202	1122,1
11	10,8585	-23,2341	1206,5
12'	22,6084	-11,4842	1405,1

Für alle Linien ist $W_1 = W_2 = Z = 0$, für die Linien Nr. 1 bis 6: $\alpha_1'' = -90^\circ$
 $\lambda = 34,0925$; für die Linien Nr. 7 bis 12: $\alpha_1' = 90^\circ$; $\lambda = -34,0926$. In

Bild 26 ist die Lage der Linien Nr. 1 bis 16 dargestellt. Dabei wurden folgende Vereinfachungen vorgenommen: In der Punktquelle 2 sind die Linien Nr 12' und 17 nicht berücksichtigt und Linie Nr 2' wurde mit der Linie Nr. 2 identifiziert.

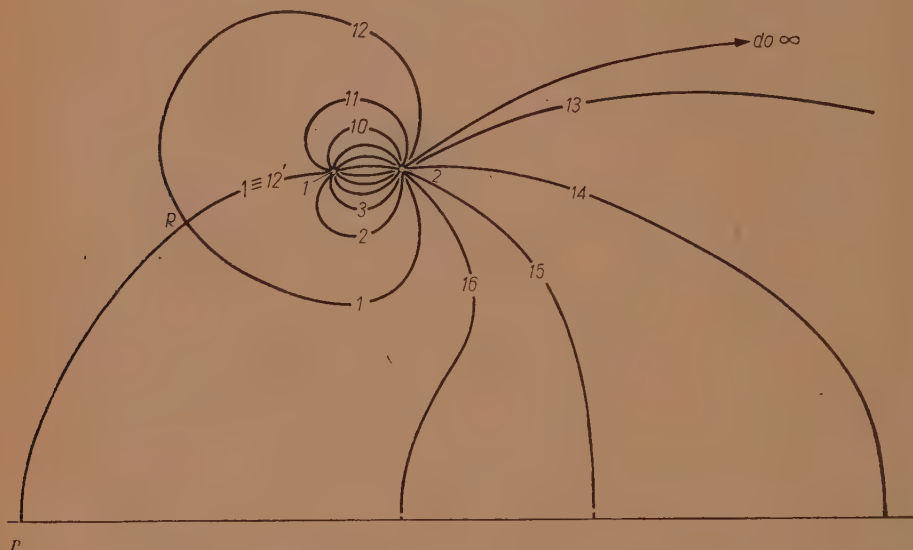


Bild 26. Feldröhren mit dem Fluß $5 \mu\text{C}/\text{km}$ in einem Feld mit den Parametern $h_1=h_2=1000 \text{ cm}$, $c_{21}=200 \text{ cm}$; $V_1=5000 \text{ V}$; $V_2=-10000 \text{ V}$.

c. Beispiel 7.

Feld mit Parametern wie im Beispiel 4 und $V_1=-V_2=7500 \text{ V}$. In der Zahlentafel 3 in [1] finden wir $Q_1=-Q_2=67,2348 \frac{\mu\text{C}}{\text{km}}$; $k=1$.

Gleichgewichtspunkt $R \equiv (0,0)$.

1. Winkel mit der Lotrechten. Linie RQ_1 : $\alpha_2''=90^\circ$; $W_1=W_2=0$. Aus (41) folgt $\alpha_1''=72^\circ 52' 6''$. Aus Symmetriegründen folgt für die Linie RQ_2 : $\alpha_2''=-72^\circ 52' 6''$. Linie $Q_1\infty$: $\delta_1''=90^\circ$; $W_1=W_2=0$; $\alpha_1'=-84^\circ 17' 22''$. Linie $Q_2\infty$: $\alpha_2'=84^\circ 17' 22''$.

2. Feldlinien. In beide Quellen münden je 13 Röhren a $5 \mu\text{C}/\text{km}$ (Zentralwinkel je $26^\circ 46' 18''$) und eine unvollständige Röhre (Nr $14/1$) mit dem Fluß 2,235 (Zentralwinkel $11^\circ 58' 6''$). Als Linie Nr 1 nehmen wir die Linie Q_1RQ_2 an. Die Angaben über sämtliche Linien sind in der Zahlentafel 9 enthalten.

Zahlentafel 9

Die den einzelnen Feldlinien entsprechenden Zentralwinkel α_2'' auf C_2 . Schnittpunkte dieser Linien mit der Geraden $\xi=0$.

Feld- linie Nr	Leitung 2		μ	ν	η'
	α_2''	Quadrant			
1	-72°52' 6''	IV			
2	-46° 5'48''	„	23° 2'54''	24°48'25''	746,5
3	-19°19'30''	„	39°39'45''	38°11'34''	857,8
4	7°26'48''	III	3°43'24''	51°34'43''	911,8
5	34°13' 6''	„	17° 6'33''	64°57'52''	946,7
6	60°59'24''	„	30°29'27''	78°20'46''	974,0
7	87°45'42''	„	43°52'51''	91°44'10''	998,0
8	-65°28' 0''	II	-32°44' 0''	-74°52'41''	1021,8
9	-38°41'42''	„	-19°20'51''	-61°29'32''	1048,1
10	-11°55'24''	„	- 5°57'42''	-48° 6'23''	1081,4
11	14 50'54''	I	7°25'27''	-34°48'14''	1130,8
12	41°37'12''	„	20°48'36''	-21°20' 5''	1225,8
13	68°23'30''	„	34°11'45''	- 7°56'56''	1556,4
	84°17'22''	„			
14	-84°50'12''	IV			

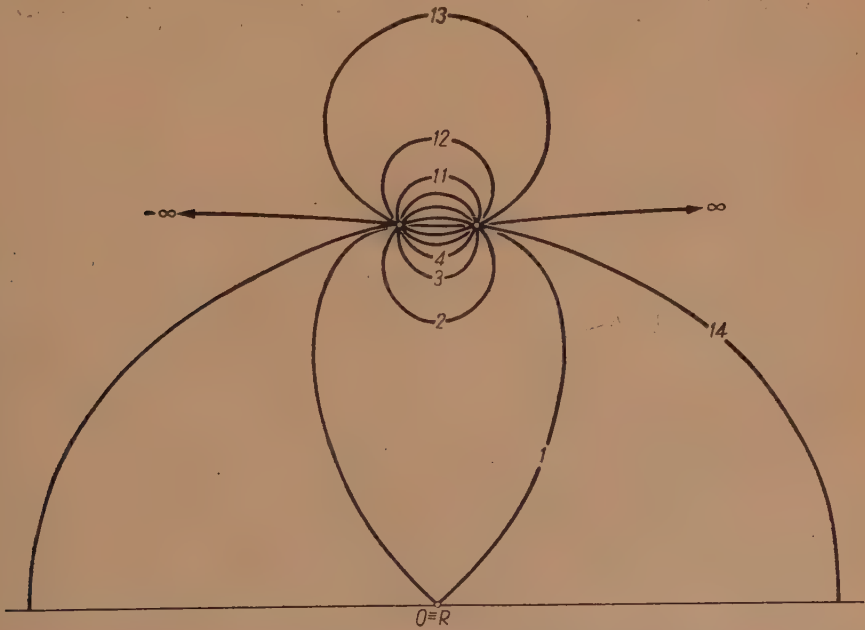


Bild 27. Feldröhren mit dem Fluß $5 \mu\text{C}\cdot\text{km}$ in einem Feld mit den Parametern
 $h_1=h_2=1000 \text{ cm}$, $c_{21}=200 \text{ cm}$;
 $V_1=7500 \text{ V}$; $V_2=-7500 \text{ V}$.

Die Winkel in C_1 erhält man aus $\alpha'_1 = -\alpha''_2$. Die Linien Nr. 2 bis 13 verlaufen zwischen Q_1 und Q_2 , die Linie Nr. 14 von den beiden Leitungen zur Erde.

3. Konstruktionsdetails. Schnittpunkte der Linien Nr. 2 bis 13 mit $\xi=0$. In allen Fällen ist $W_1=W_2=0$. Bei Nr. 2 bis 7 ist $\alpha'_1 = -90^\circ$; $\lambda=47^\circ 31' 19''$; bei Nr. 8 bis 13 ist $\alpha'_1 = 90^\circ$; $\lambda=-42^\circ 8' 41''$. Für die Linie Nr. 7 ist $Z=1$, für alle anderen $Z=0$. Schnittpunkt der Linie Nr. 14 mit $\eta'=0$. Mit $W_1=W_2=0$; $\alpha'_1 = -90^\circ$ erhalten wir aus (41) $\arctg(0,1+0,001 \xi') + \arctg(0,1-0,001 \xi') = 5^\circ 26' 13''$ und $\xi' = 1054$. Das entsprechende Feld zeigt Bild 27. Die Gerade $\xi=0$ ist hier Symmetrielinie.

Politechnika Łódzka
Katedra Podstaw Elektrotechniki

LITERATURHINWEISE

1. Konorski B.: *Pojemności jednofazowej dwuprzewodowej linii przesyłowej*. Arch. Elektrot. t. IX, z. 2, 1960.
2. Konorski B.: *Pojemności w układzie dwóch naładowanych kul*. Arch. Elektrot. t. X, z. 1, 1961.
3. Nejman L. R. i Demirczian K. S.: *K woprosu o niesootwiestwii zaryadow czasticznych jomkostiej potokam rezultirujuszczego pola*. Elektricitestwo Nr 6, 1960.

POLE ELEKTROSTATYCZNE DWUPRZEWODOWEJ LINII PRZESYŁOWEJ

Atlas zbadanych pól elektrostatycznych jest nadzwyczaj ubogi i gruntownie zanalizowanych jest tylko kilka pozycji: 1) pole ładunku punktowego naładowanej kuli lub elipsoidy metalowej; 2) pole ładunku prostoliniowego lub prostoliniowego metalowego walca o przekroju kołowym albo elipsoidalnym; 3) pole dwóch ładunków punktowych oraz 4) pole dwóch równoległych ładunków prostoliniowych, albo (co na jedno wychodzi) pole dwóch równoległych do siebie walców kołowych. Wiedza nasza o pozostałych rodzajach pól jest tylko epizodyczna.

Praca niniejsza dodaje do wymienionego spisu jeszcze jedną pozycję.

Za pomocą podanych w niej metod możemy analitycznie ustalić punkty, przez które przechodzi dowolna linia pola i kąty jakie w tych punktach tworzą z poziomem styczne do linii pola. Poza znanym pojęciem punktu równowagi w polu zostało wprowadzone pojęcie innych elementów osobliwych: punktu podziału i linii podziału. W pracy przedstawiono poza tym własności punktów równowagi oraz uzupełniono podane w [1] metody obliczenia ich położenia. Pokazano również w jaki sposób można ustalić położenie linii osobliwych.

Ustalenie konfiguracji siatki linii osobliwych pozwala doskonale orientować się w strukturze pola tzn. w przebiegu linii pola i powierzchni ekwipotencjalnych.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ЛИНИИ

Перечень исследованных электростатических полей чрезвычайно скуден — тщательно проанализировано только несколько случаев:

1. — поле точечного заряда заряженного шара или металлического эллипсоида вращения; 2. — поле прямолинейного заряда или прямолинейного цилиндра с круглым или эллиптическим поперечным сечением; 3. — поле двух точечных зарядов; 4. — поле двух параллельных прямолинейных зарядов или (что аналогично) двух параллельных цилиндрических проводников с круглым поперечным сечением. Наши сведения об остальных формах полей лишь эпизодические.

Настоящий труд добавляет к перечисленным случаям еще одну позицию.

Пользуясь приведенными в ней методами можно аналитически определить точки, через которые проходит любая линия электростатического поля и углы образуемые в этих точках касательной к линии с горизонталью. Кроме известного понятия точки равновесия введены новые понятия особых элементов: точки раздела и линии раздела. В работе приведены кроме того свойства точек равновесия и пополнены приведенные в [1] методы определения их местоположения. Показано также каким образом можно определить местоположение особых линий.

Определение конфигурации сетки особых линий позволяет отлично ориентироваться в структуре поля, т.е. в расположении линий электростатического поля и эквипотенциальных поверхностей.

621.3.052

J. S. ZIELIŃSKI

Składowe symetryczne grupowe N - n -fazowe

Rękopis dostarczono 11. 4. 1960

Na podstawie przykładów różnych układów składowych symetrycznych grupowych ustalono prawidłowości rządzące budową macierzy kwadratowej odpowiednich układów składowych symetrycznych grupowych, co pozwoliło na ustalenie macierzy kwadratowej składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych. Przeprowadzono rozważania nad zastosowaniami składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych do analizy błędów w układach N - n -fazowych, podając ogólne schematy połączeń sieci zastępczych dla pewnych rodzajów asymetrii poprzecznych i podłużnych. W zakończeniu omówiono sposoby uproszczenia obliczeń przez zastosowanie przekształconych składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych.

SKŁADOWE SYMETRYCZNE GRUPOWE N - n -FAZOWE

Pojęcie składowych symetrycznych grupowych, wprowadzone przez Ebina [3] i rozwinięte w [8] ÷ [12], okazało się przydatne i wygodne zarówno w analizie asymetrii w układach nie będących symetrycznymi trójfazowymi [3], [8] ÷ [10] jak i w pewnych przypadkach obliczeń symetrycznych linii trójfazowych [11], [12].

Celem niniejszej pracy jest ustalenie macierzy kwadratowej składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych i wyciągnięcie wniosków wynikających z dotychczas publikowanych prac poświęconych tym składowym.

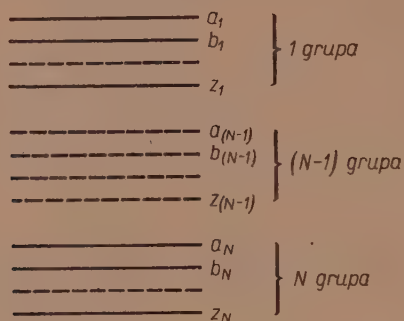
1. ROZWAŻANIA WSTĘPNE

Rozważmy N grup przewodów, z których każda składa się z n przewodów (rys. 1) sprzęgniętych między sobą impedancjami wzajemnymi. Jeśli z daną grupą n przewodów związany jest niesymetryczny układ wektorów, to można, jak wiemy, zastąpić go n układami składowych symetrycznych n -fazowych z charakterystycznym operatorem obrotu

$$h_n = e^{j \frac{2\pi}{n}} \quad (1)$$

[1], [2], [4] ÷ [7].

Załóżmy teraz, że odpowiednie układy składowych symetrycznych związanych z każdą spośród N grup przewodów nie są jednakowe, tzn. różnią się: 1. wartością wektorów, 2. są przesunięte względem siebie o pewien kąt, 3. jednocześnie występują różnice 1 i 2. Ponieważ poszcze-



Rys. 1. Układ N grup złożonych z n przewodów, sprzęgniętych impedancjami wzajemnymi.

gólne grupy przewodów sprzęgnięte są ze sobą impedancjami wzajemnymi, zatem N odpowiadających sobie, ale niejednakowych układów składowych symetrycznych n -fazowych, można zastąpić przez N układów składowych symetrycznych N -fazowych z charakterystycznym operatorem obrotu

$$H_N = e^{j \frac{2\pi}{N}} \quad (2)$$

Z powyższych rozważań wynika, że niesymetryczny układ $N \cdot n$ wektorów, związanych z rozpatrywanym przez nas układem przewodów, można zastąpić składowymi symetrycznymi grupowymi N - n -fazowymi. Oznaczając przez W macierz kolumnową $N \cdot n$ wektorów, przez W_s — macierz kolumnową składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych, piszemy na podstawie powyższych rozważań równanie macierzowe postaci

$$W = S \times W_s \quad (3)$$

gdzie S jest macierzą kwadratową składowych symetrycznych grupowych. Macierz kwadratowa zwykłych składowych symetrycznych n -fazowych podana została w literaturze (np. [2], [7], bądź można ułożyć ją na podstawie rozważań prowadzonych w [1], [4]).

Poniżej zajmiemy się utworzeniem macierzy kwadratowej składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych.

2. MACIERZ KWADRATOWA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH N-DWUFAZOWYCH I MACIERZ ODWROTNA

Na podstawie [8] piszemy:

1. Równanie macierzowe, wiążące niesymetryczny układ 2×2 wektorów ze składowymi symetrycznymi grupowymi dwu-dwufazowymi.

$$\begin{bmatrix} W_a \\ W_b \\ W_c \\ W_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h^{-1} & h^{-1} \\ 1 & H^{-1} & 1 & H^{-1} \\ 1 & H^{-1} & h^{-1} & h^{-1} H^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{a00} \\ W_{a01} \\ W_{a10} \\ W_{a11} \end{bmatrix} \quad (4a)$$

2. Równanie macierzowe określające zależność między składowymi symetrycznymi grupowymi dwu-dwufazowymi i niesymetrycznym układem 2×2 wektorów.

$$\begin{bmatrix} W_{a00} \\ W_{a01} \\ W_{a10} \\ W_{a11} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & H^{-1} & H^{-1} \\ 1 & h^{-1} & 1 & h^{-1} \\ 1 & h^{-1} & H^{-1} & h^{-1} H^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \\ W_c \\ W_d \end{bmatrix} \quad (4b)$$

W równaniach (4a) i (4b) charakterystyczne operatory obrotu

$$h = H = e^{j\frac{2\pi}{2}} = e^{j\pi} = -1$$

zatem macierz kwadratowa w równaniu (4a) jest symetryczna i nieosobliwa, odwrotna do niej macierz kwadratowa występująca w (4b) jest również symetryczna.

Na podstawie [10] piszemy:

1. Równanie macierzowe wiążące niesymetryczny układ 3×2 wektorów ze składowymi symetrycznymi grupowymi trój-dwufazowymi:

$$\begin{bmatrix} W_a \\ W_b \\ W_c \\ W_d \\ W_e \\ W_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h^{-1} & h^{-1} & h^{-1} \\ 1 & H^{-1} & H^{-2} & 1 & H^{-1} & H^{-2} \\ 1 & H^{-1} & H^{-2} & h^{-1} & h^{-1} H^{-1} & h^{-1} H^{-2} \\ 1 & H^{-2} & H^{-4} & 1 & H^{-2} & H^{-4} \\ 1 & H^{-2} & H^{-4} & h^{-1} & h^{-1} H^{-2} & h^{-1} H^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{a00} \\ W_{a01} \\ W_{a02} \\ W_{a10} \\ W_{a11} \\ W_{a12} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

2. Równanie macierzowe określające zależność między składowymi symetrycznymi grupowymi trój-dwufazowymi i niesymetrycznym układem 3×2 wektorów

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 W_{a00} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & W_a \\
 W_{a01} & 1 & 1 & H^{-2} & H^{-2} & H^{-4} & H^{-4} & W_b \\
 W_{a02} & 1 & 1 & H^{-1} & H^{-1} & H^{-2} & H^{-2} & W_c \\
 \hline
 & \frac{1}{3 \times 2} & & & & & & \\
 W_{a10} & 1 & h^{-1} & 1 & h^{-1} & 1 & h^{-1} & W_d \\
 W_{a11} & 1 & h^{-1} & H^{-2} & h^{-1} & H^{-2} & H^{-4} & h^{-1} & H^{-4} & W_e \\
 W_{a12} & 1 & h^{-1} & H^{-1} & h^{-1} & H^{-1} & H^{-2} & h^{-1} & H^{-2} & W_f
 \end{array} \quad (5b)$$

W równaniach (5a) i (5b) charakterystyczne operatory obrotu

$$h = e^{j\frac{2\pi}{2}} = e^{j\pi} = -1, \quad H = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a$$

zatem macierz kwadratowa w równaniu (5a) jest niesymetryczna i nie-osiobliwa, odwrotna do niej macierz kwadratowa w równaniu (5b) jest również macierzą niesymetryczną.

Analizując budowę macierzy kwadratowych w równaniach (4a) i (5a) ustalamy macierz kwadratową składowych symetrycznych grupowych N -dwufazowych jako

$$S_{N-2} = \begin{array}{c|cccc}
 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 1 & 1 & \dots & 1 & h^{-1} & h^{-1} & \dots & h^{-1} \\
 1 & H^{-1} & \dots & H^{-(N-1)} & 1 & H^{-1} & \dots & H^{-(N-1)} \\
 1 & H^{-1} & \dots & H^{-(N-1)} & h^{-1} & h^{-1} H^{-1} & \dots & h^{-1} H^{-(N-1)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & H^{-(N-1)} & \dots & H^{-(N-1)^2} & 1 & H^{-(N-1)} & \dots & H^{-(N-1)^2} \\
 1 & H^{-(N-1)} & \dots & H^{-(N-1)^2} & h^{-1} & h^{-1} H^{-(N-1)} & \dots & h^{-1} H^{-(N-1)^2}
 \end{array} \quad (6a)$$

Na podstawie (4b) i (5b) piszemy macierz odwrotną do macierzy kwadratowej składowych symetrycznych grupowych N -dwufazowych

$$S_{N-2}^{-1} = \frac{1}{N \cdot 2} \begin{array}{c|cccc}
 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
 1 & 1 & H^{-(N-1)} & H^{-(N-1)} & \dots & H^{-(N-1)^2} & H^{-(N-1)^2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 1 & H^{-(N-1)^2} & H^{-(N-1)^2} & \dots & H^{-(N-1)^3} & H^{-(N-1)^3} \\
 1 & h^{-1} & 1 & h^{-1} & \dots & 1 & h^{-1} \\
 1 & h^{-1} & H^{-(N-1)} & h^{-1} H^{-(N-1)} & \dots & H^{-(N-1)^2} & h^{-1} H^{-(N-1)^2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & h^{-1} & H^{-(N-1)^2} & h^{-1} H^{-(N-1)^2} & \dots & H^{-(N-1)^3} & h^{-1} H^{-(N-1)^3}
 \end{array} \quad (6b)$$

W równaniach (6a) i (6b) charakterystyczne operatory obrotu

$$h = e^{j\frac{2\pi}{2}} = e^{j\pi} = -1, \quad H = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

3. MACIERZ KWADRATOWA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH N -TRÓJFAZOWYCH I MACIERZ ODWROTNA

Analizując budowę macierzy kwadratowych składowych symetrycznych grupowych: dwu-trójfazowych [11] i trój-trójfazowych oraz macierzy odwrotnych piszemy macierz kwadratową składowych symetrycznych grupowych N -trójfazowych w postaci podanej na str. 670 wzór (7a) oraz macierz odwrotną wzór (7b) str. 671.

W równaniach (7a) i (7b) charakterystyczne operatory obrotu

$$h = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a, \quad H = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

4. MACIERZ KWADRATOWA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH N - n -FAZOWYCH I MACIERZ ODWROTNA

W celu ustalenia macierzy kwadratowej składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych i macierzy odwrotnej, zanalizujemy budowę macierzy określonych odpowiednio wzorami: (6a) i (7a) oraz (6b) i (7b).

Porównanie macierzy kwadratowych określonych przez (6a) i (7a) pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków dotyczących budowy tych macierzy:

1. Wyróżniamy grupy kolumn o tej samej strukturze, liczba ich równa jest n , tj. liczbie przewodów zawartych w jednej grupie. W każdej grupie kolumn jest N kolumn, tj. tyle, ile grup przewodów.
2. Wyróżniamy grupy wierszy o tej samej strukturze, liczba ich równa jest N . W każdej grupie wierszy jest n wierszy.

W oparciu o powyższe spostrzeżenia i wzory (6a) i (7a) możemy ułożyć macierz kwadratową składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych w postaci podanej na str. 672 wzór (8a).

Porównując macierze odwrotne określone przez (6b) i (7b) możemy ustalić te same wnioski dotyczące ich budowy, co i dla macierzy kwadratowych, podstawiając tylko zamiast n - N i N - n . W oparciu o macierze odwrotne określone przez (6b) i (7b) oraz wnioski dotyczące ich budowy układamy macierz odwrotną do macierzy kwadratowej składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych w postaci str. 673 wzór (8b).

W równaniach (8a) i (8b) charakterystyczne operatory obrotu

$$h = e^{j\frac{2\pi}{n}} \quad i \quad H = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

dla $n=2, 3, 4, \dots$ i $N=2, 3, 4, \dots$

1	1	...	1	1	1	...	1	1	...	1	...	1
1	1	...	1	h^{-1}	h^{-1}	...	h^{-1}	h^{-2}	h^{-2}	h^{-2}	...	h^{-2}
1	1	...	1	h^{-2}	h^{-2}	...	h^{-2}	h^{-4}	h^{-4}	h^{-4}	...	h^{-4}
1	H^{-1}	...	$H^{-(N-1)}$	1	H^{-1}	...	$H^{-(N-1)}$	1	H^{-1}	...	...	$H^{-(N-1)}$
1	H^{-1}	...	$H^{-(N-1)}$	h^{-1}	$h^{-1}H^{-1}$	...	$h^{-1}H^{-(N-1)}$	h^{-2}	$h^{-2}H^{-1}$	...	...	$h^{-2}H^{-(N-1)}$
1	H^{-1}	...	$H^{-(N-1)}$	h^{-2}	$h^{-2}H^{-1}$	...	$h^{-2}H^{-(N-1)}$	h^{-4}	$h^{-4}H^{-1}$	...	...	$h^{-4}H^{-(N-1)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	$H^{-(N-1)}$	...	$H^{-(N-1)^2}$	1	$H^{-(N-1)}$	...	$H^{-(N-1)^2}$	1	$H^{-(N-1)}$	...	...	$H^{-(N-1)^2}$
1	$H^{-(N-1)}$	...	$H^{-(N-1)^2}$	h^{-1}	$h^{-1}H^{-(N-1)}$	...	$h^{-1}H^{-(N-1)^2}$	h^{-2}	$h^{-2}H^{-(N-1)}$	...	...	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$
1	$H^{-(N-1)}$	...	$H^{-(N-1)^2}$	h^{-2}	$h^{-2}H^{-(N-1)}$	...	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$	h^{-4}	$h^{-4}H^{-(N-1)}$	...	...	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$

$$S_{N-3} =$$

$S_{N-3}^{-1} = \frac{1}{N \cdot 3}$										Wzór (7b)	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	$H^{-(N-1)}$	$H^{-(N-1)}$	$H^{-(N-1)}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^2}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	$H^{-(N-1)^3}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^2}$	$H^{-(N-1)^3}$	$H^{-(N-1)^3}$	$H^{-(N-1)^3}$	$H^{-(N-1)^3}$	$H^{-(N-1)^3}$
1	h^{-2}	h^{-4}	1	h^{-2}	h^{-4}	h^{-4}	h^{-4}	h^{-2}	h^{-2}	h^{-4}	h^{-4}
1	h^{-2}	h^{-4}	$H^{-(N-1)}$	$h^{-2}H^{-(N-1)}$	$h^{-4}H^{-(N-1)}$	$h^{-4}H^{-(N-1)}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	h^{-2}	h^{-4}	$H^{-(N-1)^2}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$
1	h^{-4}	h^{-2}	1	h^{-4}	h^{-2}	h^{-2}	h^{-4}	h^{-4}	h^{-2}	h^{-2}	h^{-2}
1	h^{-4}	h^{-2}	$H^{-(N-1)}$	$h^{-4}H^{-(N-1)}$	$h^{-2}H^{-(N-1)}$	$h^{-2}H^{-(N-1)}$	$h^{-(N-1)^2}$	$h^{-(N-1)^2}$	$h^{-(N-1)^2}$	$h^{-(N-1)^2}$	$h^{-(N-1)^2}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	h^{-4}	h^{-2}	$H^{-(N-1)^2}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^2}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^3}$
1	h^{-4}	h^{-2}	$H^{-(N-1)^3}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^3}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^3}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^3}$	$h^{-(N-1)^4}$	$h^{-(N-1)^4}$	$h^{-(N-1)^4}$	$h^{-(N-1)^4}$	$h^{-(N-1)^4}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	h^{-4}	h^{-2}	$H^{-(N-1)^4}$	$h^{-4}H^{-(N-1)^4}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^4}$	$h^{-2}H^{-(N-1)^4}$	$h^{-(N-1)^5}$	$h^{-(N-1)^5}$	$h^{-(N-1)^5}$	$h^{-(N-1)^5}$	$h^{-(N-1)^5}$

$1 \ 1$	$\dots 1$	1	1	$\dots 1$	$\dots \dots$	1	1	$\dots 1$
$1 \ 1$	$\dots 1$	h^{-1}	h^{-1}	$\dots h^{-1}$	$\dots \dots$	$h^{-(n-1)}$	$h^{-(n-1)}$	$\dots h^{-(n-1)}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$1 \ 1$	$\dots 1$	$h^{-(n-1)}$	$h^{-(n-1)}$	$\dots h^{-(n-1)}$	$\dots \dots$	$h^{-(n-1)^2}$	$h^{-(n-1)^2}$	$\dots h^{-(n-1)^2}$
$1 \ H^{-1}$	$\dots H^{-(N-1)}$	1	H^{-1}	$\dots H^{-(N-1)}$	$\dots \dots$	1	H^{-1}	$\dots H^{-(N-1)}$
$1 \ H^{-1}$	$\dots H^{-(N-1)}$	h^{-1}	$h^{-1} H^{-1}$	$\dots h^{-1} H^{-(N-1)}$	$\dots \dots$	$h^{-(n-1)}$	$h^{-(n-1)} H^{-1}$	$\dots h^{-(n-1)} H^{-(N-1)}$
$\dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$1 \ H^{-1}$	$\dots H^{-(N-1)}$	$h^{-(n-1)}$	$h^{-(n-1)} H^{-1}$	$\dots h^{-(n-1)} H^{-(N-1)}$	$\dots \dots$	$h^{-(n-1)^2}$	$h^{-(n-1)^2} H^{-1}$	$\dots h^{-(n-1)^2} H^{-(N-1)}$
$\dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$1 \ H^{-(N-1)}$	$\dots H^{-(N-1)^2}$	1	$H^{-(N-1)}$	$\dots H^{-(N-1)^2}$	$\dots \dots$	1	$H^{-(N-1)}$	$\dots H^{-(N-1)^2}$
$1 \ H^{-(N-1)}$	$\dots H^{-(N-1)^2}$	h^{-1}	$h^{-1} H^{-(N-1)}$	$\dots h^{-1} H^{-(N-1)^2}$	$\dots \dots$	$h^{-(n-1)}$	$h^{-(n-1)} H^{-(N-1)}$	$\dots h^{-(n-1)} H^{-(N-1)^2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots$	$\dots \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$1 \ H^{-(N-1)}$	$\dots H^{-(N-1)^2}$	$h^{-(n-1)}$	$h^{-(n-1)} H^{-(N-1)}$	$\dots h^{-(n-1)} H^{-(N-1)^2}$	$\dots \dots$	$h^{-(n-1)^2}$	$h^{-(n-1)^2} H^{-(N-1)}$	$\dots h^{-(n-1)^2} H^{-(N-1)^2}$

$S_{N-n} =$

$$S_N^{-1} = \frac{1}{N \cdot n}$$

[illegible]

Macierz kwadratowa składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych jest zawsze nieosobliwa, natomiast symetryczna staje się tylko dla $N=n$. Oznacza to, że istnieje zawsze przekształcenie odwrotne tej macierzy, ale jest ono macierzą symetryczną tylko w przypadku $N=n$.

Jeśli w równaniu macierzowym

$$W = S_{N-n} W_s \quad (9)$$

W oznacza macierz kolumnową układu N - n -wektorów, S_{N-n} — macierz kwadratową składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych, daną przez równanie (8a), to

$$W_s = \begin{bmatrix} W_{00} \\ W_{01} \\ \dots \\ W_{0(N-1)} \\ \dots \\ W_{(N-1)0} \\ \dots \\ W_{(N-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Równanie (10) wraz z (9) i (8a) pozwalają wyrazić dowolny układ Nn wektorów przez ich składowe symetryczne grupowe rzędu Nn .

5. SKŁADOWE SYMETRYCZNE GRUPOWE N - n -FAZOWE JAKO UOGÓLNIENIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH N -FAZOWYCH

Przytoczmy w ślad za [2] i [7] macierz kwadratową składowych symetrycznych n -fazowych:

$$S_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h^{-1} & h^{-2} & h^{-(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h^{-(n-1)} & h^{-2(n-1)} & h^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Rozważmy macierz kwadratową składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych (8a). Na jej podstawie możemy wyznaczyć macierz kwadratową składowych symetrycznych n -fazowych w następujący sposób:

Zauważymy, że w tym przypadku mamy do czynienia z $N=1$ grupą n przewodów. W oparciu o wnioski 1 i 2 z p. 4 wynika, że z macierzy (8a) pozostanie:

1. n grup kolumn, przy czym w każdej z grup pozostanie $N=1$ (pierwsza) kolumna,
2. $N=1$ (pierwsza) grupa wierszy, w której jest n wierszy.

Z powyższego wynika, że macierz (8a) w tym przypadku przyjmie postać macierzy kwadratowej składowych symetrycznych n -fazowych (11), w macierzy kolumnowej (10) zaś pozostaną jedynie wektory składowe o tym samym wskaźniku, tzn. $W_{00}, W_{11}, W_{22} \dots W_{nn}$, tzn. wektory składowych symetrycznych n -fazowych podstawowej fazy układu n -fazowego.

Możemy zatem powiedzieć, że składowe symetryczne grupowe N - n -fazowe są uogólnieniem składowych symetrycznych n -fazowych.

6. OBLICZANIE ASYMETRII W UKŁADACH WIELOPRZEWODOWYCH METODĄ SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH N - n -FAZOWYCH

Na podstawie analizy [1], [3] ÷ [12] można wysunąć szereg ogólnych wniosków będących wytycznymi w posługiwaniu się metodą składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych, zastosowaną do analizy stanów asymetrii układu N - n -przewodowego.

6.1. Określenie impedancji zastępczych układu N - n -przewodowego dla składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych

Dla uzyskania rezultatu postępujemy tak, jak w omawianej w literaturze teorii składowych symetrycznych trójfazowych (por. [1] oraz [3] do [12]). Możemy powiedzieć, że w ogólnym przypadku impedancje zastępcze dla składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych całkowicie symetrycznego układu N n przewodów określone będą poniższym równaniem macierzowym:

$$\begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{00-01} & \dots & Z_{00-(N-1)(n-1)} \\ Z_{01-00} & Z_{01} & \dots & Z_{01-(N-1)(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{(N-1)(n-1)-00} & Z_{(N-1)(n-1)-01} & \dots & Z_{(N-1)(n-1)-(N-1)(n-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Z_s + (Nn-1)Z_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_s - Z_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Z_s - Z_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

przy czym w powyższym równaniu oznaczają:

Z_s — impedancja własna pętli ziemnopowrotnej,

Z_m — impedancja wzajemna między dwiema takimi pętlami.

6.2. Równania podstawowe

Analizując asymetrię w układzie N - n -przewodowym mamy 4 Nn niewiadomych, które musimy określić z odpowiednich równań. Wśród tych równań $3Nn$ są niezależne od rodzaju asymetrii (równania typu (9) napisane dla prądów i napięć oraz równanie podstawowe) i Nn równań warunkowych, wynikających z rodzaju rozważanej asymetrii. Równania podstawowe mają postać równania macierzowego

$$U_s = E_s^{(B)} - J_s Z_s \quad (13)$$

W powyższym równaniu oznaczają:

U_s — macierz kolumnową składowych symetrycznych grupowych napięć postaci (10),

$E_s^{(B)}$ — macierz kolumnową składowych symetrycznych grupowych napięć w miejscu błędu przed jego wystąpieniem, postaci (10), przy czym niektóre jej elementy mogą być równe 0. Jeśli układ wektorów napięć źródłowych, związanych z grupą n przewodów jest symetryczny, to w macierzy tylko jeden element będzie różny od 0. Nietrudno spostrzec, że element ten będzie wektorem napięcia identycznym z wektorem napięcia źródłowego. Jeśli natomiast układ wektorów napięć źródłowych związanych z grupą n przewodów jest niesymetryczny, to w rozpatrywanej macierzy wystąpi tyle elementów różnych od 0, na ile układów składowych rozkłada się układ napięć źródłowych (por. [10]),

J_s — macierz diagonalną składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych prądów postaci:

$$J_s = \begin{bmatrix} J_{00} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{01} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{(N-1)(n-1)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Z_s — macierz kolumnową impedancji układu dla składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych, widzianych z miejsca błędu postaci (12).

6.3. Schematy połączeń sieci zastępczych, odwzorowujące niektóre asymetrie w układzie N - n przewodowym

Analiza schematów połączeń sieci zastępczych, sporządzonych dla różnych asymetrii za pomocą różnych układów składowych symetrycznych pozwala na wyciągnięcie kilku wniosków.

Najprostsze schematy połączeń sieci zastępczych uzyskuje się wówczas, gdy asymetria wtrąca przewody położone symetrycznie a) w stosunku do podstawowej grupy przewodów (tzn. zawierającej przewód podstawowy) i b) w stosunku do przewodu podstawowego a . Jak widać, pojęcie fazy podstawowej, znane z teorii składowych symetrycznych n -fazowych zostało rozszerzone na grupę przewodów zawierających przewód podstawowy, grupę tę nazwalismy przez analogię grupą podstawową. Oczywiście w przypadku dużej liczby przewodów, właściwe usytuowanie asymetrii, prowadzące do najprostszego schematu połączeń sieci zastępczych, nie zawsze jest oczywiste i wymaga zastanowienia (por. p. 3 w [10]).

W schematach połączeń sieci zastępczych odwzorowujących asymetrię poprzeczne, z udziałem ziemi, zawsze występuje sieć zastępcza dla składowej 00. Innymi słowy występowanie składowej 00 prądów w układzie świadczy o zwarcie doziemnym (ogólnie Nn przewodowym).

Schematy połączeń sieci zastępczych w przypadku gdy $(Nn-1)$ wektorów prądów płynących w Nn przewodach jest równe 0.

W przypadku tym spełniona będzie równość między składowymi symetrycznymi grupowymi Nn -fazowymi prądów.

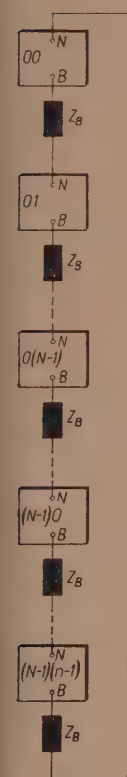
$$J_{00} = J_{01} = \dots = J_{0(N-1)} = \dots = \\ = J_{(N-1)0} = \dots = J_{(N-1)(n-1)} = \frac{1}{Nn} J \quad (15)$$

oraz napięć

$$U_{00} + \dots + U_{0(N-1)} + \dots + U_{(N-1)0} + \\ + \dots + U_{(N-1)(n-1)} = N \cdot n J_{00} Z_B \quad (16)$$

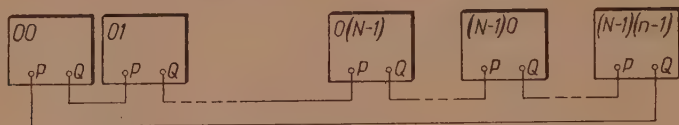
W przypadku gdy równości (15) i (16) spełnione są odpowiednio przez wektory prądów i napięć przewodu podstawowego a , sieci zastępcze dla składowych połączone są ze sobą szeregowo.

Równania (15) i (16) spełnione są w dwu przypadkach: a) asymetrii poprzecznej — wówczas połączone są ze sobą szeregowo: punkt błędu jednej sieci B z punktem neutralnym N drugiej sieci (por. rys. 2, na którym przedstawiono schemat połączeń sieci zastępczych dla zwarcia przewodu a z ziemią przez impedancję Z_B).



Rys. 2.
Schemat połączeń sieci zastępczych dla zwarcia przewodu a z ziemią przez impedancję Z_B .

- b) asymetrii podłużnej — wówczas połączone są ze sobą szeregowo: punkt końcowy asymetrii jednej sieci Q z punktem początkowym w drugiej P (por. rys. 3) (w tym przypadku prawa strona równania (22) jest równa zero, ponieważ w podstawowym przewodzie a $Z_B=0$).



Rys. 3. Schemat połączeń sieci zastępczych dla przerwy $Nn-1$ przewodów.

Schematy połączeń sieci zastępczych w przypadku gdy $(Nn-1)$ wektorów napięć przewodów w stosunku do ziemi są równe sobie i jeden z wektorów prądu płynącego w przewodzie równy jest zero.

Jeśli prąd płynący w przewodzie podstawowym równy jest zero, spełniona jest wówczas równość:

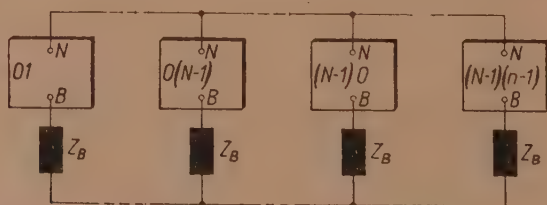
$$J_{00} + J_{01} + \dots + J_{0(N-1)} + \dots + J_{(N-1)0} + \dots + J_{(N-1)(N-1)} = 0 \quad (17)$$

O ile jedynym nierównym wektorem napięcia przewodu w stosunku do ziemi jest wektor podstawowego przewodu a , to:

$$U_{01} = \dots = U_{0(N-1)} = \dots = U_{(N-1)0} = \dots = U_{(N-1)(n-1)} = \frac{1}{N_n} U_a. \quad (18)$$

Rozróżniamy tu 3 przypadki:

- a) zwarcie $(Nn-1)$ przewodów przez impedancje Z_B — wtedy słuszne są równania (18), w równaniach (17) nie występuje J_{00} , wówczas w schemacie połączeń sieci zastępczych wystąpi $Nn-1$ sieci, przy czym w szeregu z każdą z nich włączona jest impedancja Z_B (por. rys. 4),

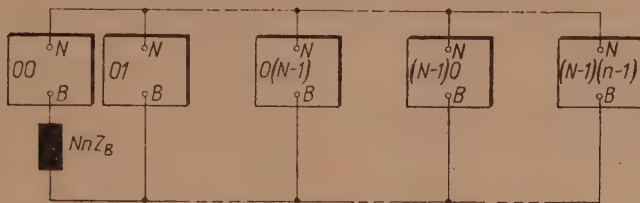


Rys. 4. Schemat połączeń sieci zastępczych dla zwarcia $Nn-1$ przewodów przez impedancje Z_B .

- b) zwarcie $(Nn-1)$ przewodów z ziemią przez impedancję Z_B — do równań (17) i (18) dochodzi równanie

$$U_{00} - U_{01} = N_n J_{00} Z_B \quad (19)$$

W schemacie wszystkie sieci połączone są równolegle, z tym, że w szereg z siecią dla składowej 00 włączona jest impedancja $Nn \cdot Z$ (por. rys. 5).

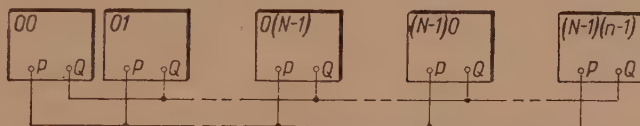


Rys. 5. Schemat połączeń sieci zastępczych dla zwarcia $Nn-1$

c) przerwa w przewodzie podstawowym a — równanie (17) pozostaje słuszne, natomiast równanie (18) przepisujemy dla strat napięcia i uzupełniamy do postaci

$$\begin{aligned} \Delta U_{00} = \Delta U_{01} = \dots = \Delta U_{0(N-1)} = \dots = \Delta U_{(N-1)0} = \dots = \\ \Delta U_{(N-1)(n-1)} = \frac{1}{Nn} \Delta U_a \end{aligned} \quad (20)$$

W tym przypadku sieci zastępcze będą połączone ze sobą równolegle w punktach asymetrii P i Q (por. rys. 6).



Rys. 6. Schemat połączeń sieci zastępczych dla przerwy przewodu a z ziemią przez impedancję B .

7. UWAGI O WARUNKACH I SPOSOBACH UPROSZCZENIA OBLICZEŃ PROWADZONYCH METODĄ SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH N - n -FAZOWYCH

Przekształcenie składowych symetrycznych trójfazowych.

W rozdziale tym przedstawimy wnioski z prac E. Clarke, zaczerpnięte z [1]. Pamiętajmy, że macierz kwadratowa składowych symetrycznych trójfazowych ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

gdzie $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j120^\circ}$ jest operatorem charakterystycznym obrotu, przy czym

$$a = \frac{-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (22)$$

Jeśli uwzględnimy równania (22), wówczas elementy macierzy kwadratowej (21) możemy przekształcić, ulegnie wówczas zmianie macierz kolumnowa układów składowych. Nowe równanie macierzowe uzyskane w wyniku przekształceń, przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} W_a \\ W_b \\ W_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2} & -j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} & j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ (W_1 + W_2) \\ (W_1 - W_2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Składowe, występujące w równaniu (23) Clarke nazwała odpowiednio składowymi kolejności 0, (1+2) i (1-2). Zastosowanie tych składowych do analizy prostych asymetrii w układzie trójfazowym prowadzi — w przypadku równych impedancji układu dla składowych symetrycznych zgodnej i przeciwnej — do wyeliminowania jednej z sieci z układu połączeń odwzorowującego daną asymetrię. Należy zauważyć, że napięcia źródłowe występują w sieciach (1+2) i (1-2), impedancje sieci zaś (1+2) i (1-2) są równe sobie i równe impedancji sieci dla składowych zgodnych; impedancja sieci 0 równa jest impedancji dla składowej zerowej składowych symetrycznych trójfazowych.

Znane w literaturze pod nazwą „składowych Clarke”, zaś przez autorkę nazwane składowymi α , β , 0, są składowymi układu trzech wektorów, zgodnie z równaniem:

$$\begin{bmatrix} W_\alpha \\ W_\beta \\ W_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_\alpha \\ W_\beta \end{bmatrix} \quad (24)$$

Porównanie (23) i (24) nasuwa spostrzeżenie, że te dwa układy składowych są podobne. Istotnie, analiza przeprowadzona w [1] wykazuje, że napięcia źródłowe występują tu również w dwu sieciach (α, β); zasto-

sowanie składowych $\alpha, \beta, 0$ do analizy prostych asymetrii w układach trójfazowych również prowadzi do wyeliminowania jednej z sieci ze schematu ich połączeń, dając jedno proste połączenie odwzorowujące asymetrię tylko wówczas, gdy $Z_1 = Z_2$. (Należy zauważyć, że impedancje elementów układu dla składowych α, β , różnią się od tychże dla składowych $(1+2)$ i $(1-2)$).

Przekształcenie składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych.

Korzyści wynikające z przekształcenia składowych symetrycznych metodą wskazaną powyżej, są istotne w przypadku analizy asymetrii w obwodzie metodą składowych symetrycznych grupowych N - n -fazowych, szczególnie, gdy Nn jest duże, a rozważany obwód Nn fazowy jest częścią układu kn fazowego (gdzie $k=1, 2, 3, \dots N$). W tych przypadkach założenie o równości impedancji odpowiednio dobranych składowych odnosi się do dużej liczby par odpowiednich składowych. W przypadkach gdy rozważany obwód Nn fazowy jest fragmentem układu mn fazowego (gdzie $m \neq N$), założenie równości impedancji dla odpowiednich składowych jest słuszne tylko w szczególnych przypadkach (por. [9] i [10]).

Ogólnie możemy powiedzieć, że przekształcenie składowych symetrycznych grupowych eliminuje ze schematu połączeń sieci zastępczych odwzorowującego asymetrię tyle sieci, ile daje się dobrać par równych impedancji dla odpowiednich składowych (por. [1]), [9], [10] i [12]).

8. ZAKOŃCZENIE

Przeprowadzone powyżej rozważania stanowią uogólnienie teorii dotychczas stosowanych składowych symetrycznych i mogą być pomocą w sprawdzeniu rezultatów uzyskiwanych przy zastosowaniu nowych układów składowych symetrycznych do analizy obwodów. Być może wyłoni się w praktycznych zagadnieniach konieczność zastosowania składowych symetrycznych grupowych rzędu $Nnv \dots$, wówczas powyższa metoda postępowania i wyciągnięte wnioski mogą być pomocą do stworzenia teorii tych składowych i zastosowania ich do analizy układów.

Zakład Wysokich Napięć
Katedry Elektroenergetyki
Politechniki Łódzkiej

WYKAZ LITERATURY

1. Clarke E.: *Circuit analysis of A—C power systems* Vol. I. N. Y. J. Willey, 1956.
2. Cholewicki T.: *Macierzowa analiza obwodów liniowych*, PWN Warszawa, Wrocław 1958.

3. Ebin: *Ekonomiczne schemy elektropieriedaczy i metody ich rasczota*. Elektricestwo 1/52.
4. Wagner C. F. i Evans R. D.: *Metod simmetricznych sostawljajuszczich*. ONTS NKTP, 1936.
5. Praca zbiorowa: *Przesył i rozdział energii elektrycznej t. III*. PWT, Warszawa 1951.
6. Skoczyński Z. i Nowacki P.: *Zwarcia w wysokonapięciowych układach energoelektrycznych*. PWT, W-wa 1954.
7. Stigant S. A.: *Modern electrical engineering mathematics*. London 1947.
8. Zieliński J. S.: *Obliczanie prądów zwarciovych w układach przesyłowych cztery przewody-ziemia (CPZ) metodą składowych symetrycznych grupowych*. Zesz. Nauk. P. Ł. Elektryka Nr 3.
9. Zieliński J. S.: *Obliczanie prostych przypadków asymetrii w układach CPZ przekształconych składowych symetrycznych grupowych dwu-dwufazowych*. Zesz. Nauk. P. Ł. Elektryka Nr 8.
10. Zieliński J. S.: *Analiza błędów w linii przesyłowej typu „3 × DPZ” metodą składowych symetrycznych grupowych trój-dwufazowych zwykłych i przekształconych*.
11. Zieliński J. S.: *Składowe symetryczne grupowe dwu-trójfazowe i ich zastosowanie do analizy błędów w dwutorowych liniach trójfazowych*. Zesz. Nauk. P. Ł. Elektryka Nr 9.
12. Zieliński J. S.: *Przekształcone składowe symetryczne grupowe dwu-trójfazowe*. Zesz. Nauk. P. Ł. Elektryka Nr 9.

Uwaga: Publikacje wyszczególnione w [3] i [9] obejmują zagadnienia związane ze składowymi symetrycznymi grupowymi, nie wiążą się jednak bezpośrednio z omawianym tematem.

N-n-ФАЗНЫЕ ГРУППОВЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Рассмотрена система N групп содержащих по n проводов каждая, связанных взаимными импеданциями. Предметом работы является нахождение общих правил замены несимметричной системы Nn векторов на N - n -фазные групповые симметрические составляющие и применение их для анализа несимметричных режимов в N - n -фазных системах. Несимметричная система N - n векторов разлагается на системы групповых соединяющих согласно матричным уравнениям типа:

$$W = S_{Nn} \cdot W_s.$$

где: W — колонная матрица Nn векторов,

S_{Nn} — квадратная матрица групповых симметрических составляющих.

W_s — квадратная матрица групповых симметрических составляющих

Для определения квадратной матрицы S , рассмотрено несколько примеров разложения различных систем векторов на групповые симметрические составляющие и определено правило построения квадратной матрицы соответствующих составляющих. Определено квадратную матрицу N - n -фазных групповых симметрических составляющих (уравнение (8а) см. текст).

Эта матрица является обобщением матрицы n -фазных симметрических составляющих.

В другой части определено сопротивление N - n -проводной системы для симметрических составляющих, приведены основные уравнения и определено число

сетей обладающих э. д. с. После замечаний об особенной фазе (и особенной группе) в Nn проводной системе, определены общие комплексные схемы замещения для пяти видов несимметричных режимов.

В заключение приведены условия и способы упрощений расчетов несимметричных режимов, при применении преобразованных N - n -фазных групповых симметрических составляющих.

SYMMETRICAL N - n -PHASE GROUP COMPONENTS

In the paper a system of N -groups—every group composed of n wires — binded among themselves by mutual impedances is considered. Purpose of this work is the establishment of general rules of Nn vector decomposition on symmetrical N - n -phase group components and its application to faults analysis in N - n -phase A—C power systems.

It is possible to replace unsymmetrical Nn vectors system by components systems according to matrix equation:

$$W = S_{Nn} \cdot W_s$$

where

W — column matrix of Nn vectors,

S_{Nn} — square matrix of symmetrical N - n -phase group components,

W_s — column matrix of these components.

To define square matrix S there are considered few examples of vectors systems decompositions on symmetrical group components and rules of square matrix structure of corresponding components there are established. Square matrix of symmetrical N - n -phase group components according to these rules is defined by equation (8a)

That matrix is generalization of square matrix of symmetrical n -phase components.

The second part of the paper defines impedance of N - n wires system for symmetrical N - n -phase group components systems. There are given fundamental equations and the number of networks in which are internal voltages is determined. After some notes relating to selection of reference phase (and reference group) in Nn -wires system, general schemes of connections of sequence networks for symmetrical N - n -phase group components in five kinds of asymmetries are considered.

At the end there are discussed the conditions and means of simplifications asymmetries calculations as a result of application of symmetrical N - n -phase group transformed components.



621.395.65:621.395.342

A. PALCZEWSKI

Analiza elementarnych i złożonych układów impulsowania prądem stałym

Rękopis dostarczono dnia 17. 2. 1961 r.

W artykule na drodze analizy warunków pracy elementarnych i złożonych układów impulsowania prądem stałym, zostały określone zależności jakie istnieją między parametrami czasowymi elementów, które tworzą układ impulsowania i parametrami czasowymi impulsów wybierczych na wejściu i wyjściu tego układu.

Określone zostały również dopuszczalne graniczne wartości wymienionych parametrów czasowych, przy których zapewniony jest jeszcze prawidłowy przebieg impulsowania w ruchu zarówno wewnątrzcentralowym jak i międzycentralowym.

We wnioskach końcowych omówiono w sposób ogólny stosowanie otrzymanych zależności przy rozwiązywaniu, w warunkach eksploatacyjnych, zagadnień związanych z impulsowaniem w układach wielocentralowych.

1. WSTĘP

W telefonii łączeniowej impulsy wybiercze wytwarzane tarczą numeryową aparatu abonenckiego są przekazywane do odbiornika impulsów za pośrednictwem układów impulsowania. W centralach z wybierakami biegowymi, sterowanymi bezpośrednio impulsami wybierczymi, odbiornikiem tych impulsów jest elektromagnes wybieraka, układ zaś impulsowania tworzą przekaźniki: impulsujący z dołączonym do jego uzwojenia łączem abonenckim lub międzycentralnym, kontrolny i seryjny. Układ taki nazwano elementarnym układem impulsowania.

Przy połączeniach wewnątrzcentralowych (między abonentami tej samej centrali) impulsy wybiercze nadawane tarczą są przekazywane do odbiornika za pośrednictwem tylko jednego elementarnego układu impulsowania, w jaki jest wyposażony wybierak grupowy bądź wybierak liniowy. W układach wielocentralowych, przy połączeniach w ruchu międzycentralowym (między abonentami należącymi do różnych central), w miarę zestawiania drogi połączeniowej od abonenta alarmującego do abonenta żadanego, impulsy wybiercze są przekazywane przez kilka elementarnych układów. Układy te występują w translacjach telefonicznych, które stanowią wyposażenie łączy międzycentralowych. Przy tego

rodzaju połączeniach poszczególne elementarne układy impulsowania łączone są między sobą za pośrednictwem łączy międzycentralowych, tworząc tzw. złożony układ impulsowania.

Jeśli na wejście elementarnego układu impulsowania będą podawane impulsy wybiercze o określonym czasie trwania ich czynnej i biernej części, to na wyjściu tego układu w przypadku ogólnym otrzymuje się impulsy o innych czasach trwania czynnej i biernej części. Tego rodzaju zniekształcenie czasowe impulsów wybierczych, przekazywanych przez elementarny układ, spowodowane jest jego przekaźnikiem impulsującym. Wprowadzanie zniekształcenia czasowego impulsów wybierczych jest pierwszą cechą charakterystyczną elementarnego układu impulsowania.

Wartość D zniekształcenia czasowego impulsów wybierczych, wprowadzanego przez przekaźnik impulsujący określono [1] algebraiczną różnicą między wartością czasu przyciągania t_{pc} i wartością czasu zwalniania t_{zw} tego przekaźnika, czyli:

$$D = t_{pc} - t_{zw}.$$

Związek jaki istnieje między czasem trwania czynnej t_{c1} i biernej t_{b1} części impulsów wybierczych podawanych na wejście do elementarnego układu, a czasem trwania czynnej t_{c2} i biernej t_{b2} części impulsów otrzymywanych na jego wyjściu, w przypadku gdy układ ten wprowadza zniekształcenie o wartości D , określono [2] następującymi równaniami:

$$t_{c1} = t_{c2} - D \quad (1)$$

oraz

$$t_{b1} = t_{b2} + D. \quad (1a)$$

Również został określony [2] związek między czasami trwania poszczególnych części impulsów wybierczych na wejściu i na wyjściu złożonego układu impulsowania, utworzonego z n elementarnych układów.

Związek ten wyraża się następującymi równaniami

$$t_{c1} = t_{cn} - D_s \quad (2)$$

$$t_{b1} = t_{bn} + D_s \quad (2a)$$

gdzie

t_{c1} i t_{b1} — wartości czasów trwania czynnej i biernej części impulsu wybierczego na wejściu złożonego układu impulsowania,

t_{cn} i t_{bn} — wartości czasów trwania czynnej i biernej części impulsu wybierczego na wyjściu złożonego układu impulsowania,

$D_s = \sum_{x=1}^{x=n} D_x$ — wartość sumarycznego zniekształcenia wprowadzanego przez złożony układ impulsowania.

Z wyżej podanych zależności, po dodaniu stronami równań (1) i (1a) oraz (2) i (2a) otrzymuje się, iż

$$t_{c1} + t_{b1} = t_{c2} + t_{b2} \quad \text{oraz} \quad t_{c1} + t_{b1} = t_{cn} + t_{bn},$$

co wskazuje na drugą charakterystyczną cechę elementarnych układów impulsowania, a mianowicie, że czas trwania impulsu po przejściu przez elementarny układ względnie przez szereg elementarnych układów nie ulega zmianie.

Znajomość zarówno obu charakterystycznych cech elementarnego układu impulsowania jak i wyżej podanych zależności nie jest jednakże wystarczająca do określenia, w każdym konkretnym przypadku, takich wartości parametrów mających wpływ na przebieg impulsowania, przy których mogłoby być zapewnione prawidłowe zestawianie połączeń. Prawidłowy przebieg połączenia w automatycznych centralach telefonicznych z wybierakami biegowymi, sterowanymi bezpośrednio impulsami wybierczymi, zarówno w ruchu wewnątrzcentralowym, jak i w ruchu międzycentralowym, ogólnie biorąc będzie miał miejsce wówczas gdy wartość czasów trwania czynnej i biernej części impulsów wybierczych:

- a) w obwodzie z uzwojeniem elektromagnesu wybieraka — zapewniają jego prawidłową pracę,
- b) w obwodach z uzwojeniami przekaźników impulsującego, kontrolnego i seryjnego — zapewniają ich prawidłową pracę.

Powyższe wymagania będą spełnione o ile — w oparciu o znane wartości czasów działania elektromagnesów wybieraków oraz o wartości czasów działania przekaźników impulsującego, kontrolnego i seryjnego — zostaną dla każdego elementarnego układu impulsowania ustalone dopuszczalne minimalne czasy trwania czynnej i biernej części impulsów, zarówno podawanych na wejściu jak i otrzymywanych na wyjściu tego układu.

Treścią niniejszej pracy jest znalezienie, na drodze analizy warunków pracy elementarnych i złożonych układów impulsowania, powiązań istniejących między parametrami tych układów. Znajomość tych zależności pozwoli określać takie granice zmian interesujących parametrów, przy których może być zapewniony prawidłowy przebieg połączenia, zarówno w ruchu wewnątrzcentralowym jak i w ruchu międzycentralowym.

2. DOPUSZCZALNA MINIMALNA I MAKSYMALNA WARTOŚĆ STOSUNKU $\vartheta_1 = t_{c1} / t_{b1}$ IMPULSÓW WYBIERCZYCH NA WEJŚCIU ELEMENTARNEGO UKŁADU IMPULSOWANIA, ZE WZGLĘDU NA PRACĘ PRZEKAŹNIKA IMPULSUJĄCEGO TEGO UKŁADU

Przekaźnik impulsujący elementarnego układu impulsowania będzie pracował prawidłowo wówczas, gdy czas trwania czynnej części impulsu wybierczego będzie dostatecznie duży tak, aby przekaźnik impulsujący

zdażył zwolnić oraz gdy czas trwania biernej części impulsu wybierczego będzie dostatecznie duży tak, aby przekaźnik ten zdażył przyciągnąć. Jeśli dla danego przekaźnika impulsującego pracującego w określonych warunkach czas przyciągania wynosi t_{pc} , czas zaś zwalniania wynosi t_{zw} , to warunek prawidłowej jego pracy może być wyrażony następującymi zależnościami.

$$t_{c1} \geq t_{zw} \quad (3)$$

oraz
$$t_{b1} \geq t_{pc} \quad (4)$$

gdzie

t_{c1} i t_{b1} są to czasy trwania czynnej i biernej części impulsów wybierczych na wejściu rozpatrywanego elementarnego układu impulsowania. W przypadku gdy określa się dopuszczalną wartość stosunku ϑ_1 impulsów wybierczych w obwodzie z uzwojeniem przekaźnika impulsującego ze względu na jego czas przyciągania t_{pc} , to najmniejsza dopuszczalna wartość czasu trwania biernej części impulsu, zgodnie z zależnością (4), wyniesie

$$(t_{b1})_{\min} = t_{pc} \quad (5)$$

Dla dowolnego czasu trwania impulsu wybierczego T istnieje zależność

$$T = t_{b1} + t_{c1} \quad (5a)$$

skąd dla danego przypadku

$$t'_{c1} = T - (t_{b1})_{\min}$$

lub, biorąc pod uwagę równanie (5),

$$t'_{c1} = T - t_{pc} \quad (6)$$

Wartość stosunku czasu trwania czynnej części do czasu trwania biernej części impulsu wyrazi się jako

$$\frac{t'_{c1}}{(t_{b1})_{\min}} = \frac{T - t_{pc}}{t_{pc}}$$

Ponieważ t_{b1} osiąga najmniejszą dopuszczalną wartość, przeto stosunek ϑ_1 dla danego czasu trwania impulsu wybierczego osiąga największą dopuszczalną wartość, którą oznacza się jako $\vartheta_{1\max}$. Ostatecznie więc ze względu na czas przyciągania przekaźnika impulsującego

$$\vartheta_{1\max} = \frac{T}{t_{pc}} - 1 \quad (7)$$

Jeśli określamy dopuszczalną wartość stosunku ϑ_1 impulsów wybierczych w obwodzie z uzwojeniem przekaźnika impulsującego ze względu

na jego czas zwalniania t_{zw} , najmniejsza dopuszczalna wartość czasu trwania czynnej części impulsu, zgodnie z zależnością (3), wyniesie

$$(t_{c1})_{\min} = t_{zw}. \quad (8)$$

Ponieważ dla tego przypadku

$$t'_{b1} = T - (t_{c1})_{\min} \quad (9)$$

lub, biorąc pod uwagę równanie (8),

$$t'_{b1} = T - t_{zw},$$

przeto otrzymuje się, iż

$$\frac{(t_{c1})_{\min}}{t'_{b1}} = \frac{t_{zw}}{T - t_{zw}}.$$

W tym przypadku t_{c1} osiąga najmniejszą dopuszczalną wartość i dlatego stosunek ϑ_1 przy określonym czasie T osiąga teraz najmniejszą dopuszczalną wartość $\vartheta_{1\min}$.

Ostatecznie więc, ze względu na czas zwalniania przekaźnika impulsującego

$$\vartheta_{1\min} = \frac{1}{\frac{T}{t_{zw}} - 1}. \quad (10)$$

A zatem przekaźnik impulsujący elementarnego układu impulsowania będzie prawidłowo pracował wówczas, gdy wartość stosunku ϑ_1 impulsów wybierczych na wejściu do tego układu będzie zawarta w granicach

$$\frac{1}{\frac{T}{t_{zw}} - 1} \leq \vartheta_1 \leq \frac{T}{t_{pc}} - 1. \quad (11)$$

Jak wynika z równań (7) i (10), ze wzrostem czasu przyciągania przekaźnika impulsującego wartość $\vartheta_{1\max}$ maleje, zaś ze wzrostem czasu zwalniania przekaźnika impulsującego wartość stosunku $\vartheta_{1\min}$ rośnie. Analogiczny wpływ na wartości tych stosunków będzie miało zmniejszanie wartości czasu trwania impulsu wybierczego T .

Z punktu widzenia więc uzyskania jak najszerszych granic dopuszczalnych wahań wartości stosunku ϑ_1 impulsów wybierczych na wejściu elementarnego układu impulsowania pożądane jest, aby czasy przyciągania i zwalniania przekaźnika impulsującego tego układu były jak najmniejsze, natomiast czas trwania impulsu wybierczego był jak najdłuższy.

3. DOPUSZCZALNA MINIMALNA I MAKSYMALNA WARTOŚĆ STOSUNKU ϑ_1 , IMPULSÓW WYBIERCZYCH NA WEJŚCIU ROZPATRYWANEGO ELEMENTARNEGO UKŁADU IMPULSOWANIA ZE WZGLĘDU NA PRACĘ NASTĘPNEGO ELEMENTARNEGO UKŁADU IMPULSOWANIA

Zniekształcenia wprowadzane przez przekąźnik impulsujący elementarnego układu impulsowania powodują, że wartość stosunku ϑ_2 impulsów wybierczych na wyjściu elementarnego układu impulsowania — ogólnie biorąc — będzie inna niż wartość stosunku ϑ_1 , impulsów wybierczych, na wejściu tego układu.

Ponieważ w złożonym układzie impulsowania wejście następnego elementarnego układu jest łączone z wyjściem poprzedniego układu elementarnego, przeto stosunek ϑ_2 otrzymywany na wyjściu rozpatrywanego elementarnego układu będzie stosunkiem czasu trwania czynnej części do czasu trwania biernej części impulsów wybierczych na wejściu następnego układu elementarnego. Ze względu na prawidłową pracę następnego elementarnego układu impulsowania można przyjąć, że na wejściu tego układu dopuszczalna minimalna wartość czasu trwania czynnej części impulsu wybierczego powinna wynosić X_c czyli, że

$$(t_{c2})_{\min} = X_c, \quad (12)$$

natomiast dopuszczalna minimalna wartość czasu trwania biernej części impulsu wybierczego powinna wynosić X_b tzn., że

$$(t_{b2})_{\min} = X_b. \quad (13)$$

Biorąc pod uwagę, że przy przekazywaniu impulsowania przez poszczególne elementarne układy czas trwania impulsów wybierczych T nie ulega zmianom, dopuszczalna minimalna i maksymalna wartość stosunku impulsów na wyjściu rozpatrywanego układu może być określona następującymi równaniami

$$\vartheta_{2\min} = \frac{X_c}{T - X_c} = \frac{1}{\frac{T}{X_c} - 1} \quad (14)$$

oraz

$$\vartheta_{2\max} = \frac{T - X_b}{X_b} = \frac{T}{X_b} - 1. \quad (15)$$

Najmniejszą wartość czasu trwania czynnej części impulsu wybierczego na wyjściu układu otrzymuje się wówczas, gdy na jego wejście będzie podany impuls o najmniejszym czasie trwania czynnej części oraz gdy wprowadzane przez przekąźnik impulsujący zniekształcenie będzie powodowało zmniejszanie czasu trwania tej części impulsu. Oznaczając przez D_c taką właśnie wartość zniekształcenia, wprowadzanego przez przekąźnik impulsujący, najmniejszą dopuszczalną wartość czasu trwania

czynnej części impulsu na wejściu układu można wyrazić, zgodnie z równaniem (1), następującą zależnością

$$(t_{c1})_{\min} = X_c - D_c. \quad (16)$$

Najmniejszą zaś wartość czasu trwania biernej części impulsu wybierczego na wyjściu z układu otrzymuje się wówczas, gdy na jego wejście będzie podany impuls o najmniejszym czasie trwania biernej części oraz gdy wprowadzane przez przekątnik impulsujący zniekształcenie będzie powodowało zmniejszanie czasu trwania tej części impulsu. Oznaczając przez D_b taką właśnie wartość zniekształcenia, wprowadzanego przez przekątnik impulsujący, najmniejszą dopuszczalną wartość czasu trwania biernej części impulsu na wejściu układu można wyrazić, zgodnie z równaniem (1a), zależnością.

$$(t_{b1})_{\min} = X_b + D_b. \quad (17)$$

W związku z tym, na podstawie uprzednio przeprowadzonych rozważań, mogą być napisane następujące zależności

$$\vartheta_{1\min} = \frac{X_c - D_c}{T - (X_c - D_c)} = \frac{1}{\frac{T}{X_c - D_c} - 1} \quad (18)$$

oraz

$$\vartheta_{1\max} = \frac{T - (X_b + D_b)}{X_b + D_b} = \frac{T}{X_b + D_b} - 1 \quad (19)$$

czyli, że wartość ϑ_1 impulsów wybierczych na wejściu układu powinna się zawierać w granicach

$$\frac{1}{\frac{T}{X_c - D_c} - 1} \leq \vartheta_1 \leq \frac{T}{X_b + D_b} - 1. \quad (20)$$

Jak wynika z równań (18) i (19), ze wzrostem wartości X_c wartość $\vartheta_{1\min}$ wzrasta, natomiast ze wzrostem wartości X_b wartość $\vartheta_{1\max}$ maleje. Takie same konsekwencje wywołuje zmniejszanie wartości czasu trwania impulsu T . A zatem i dla tego przypadku, przy wprowadzaniu przez układ zniekształcenia o określonej wartości D , szersze granice zmian wartości ϑ_1 uzyskuje się przy mniejszych wartościach czasów X_c i X_b oraz przy większej wartości czasu T . Należy rozpatrzyć również w jakich granicach może się zmieniać wartość zniekształcenia D , wprowadzanego przez rozpatrywany elementarny układ w przypadku, gdy wartość ϑ_1 impulsów na wejściu tego układu będzie utrzymywana w granicach uwarunkowanych prawidłową pracą jego przekątnika impulsującego, zaś wartość ϑ_2 impulsów na wyjściu tego układu będzie mogła się zmieniać w granicach określonych ze względu na prawidłową pracę na-

stępnego elementarnego układu impulsowania. Na podstawie otrzymanych zależności (18) i (19) oraz (10) i (7) można stwierdzić, że oba wyżej postawione warunki zostaną spełnione wówczas, gdy wartości X_c , D_c i t_{zw} będą powiązane ze sobą następującą zależnością

$$\frac{1}{\frac{T}{X_c - D_c} - 1} = \frac{1}{\frac{T}{t_{zw}} - 1} \quad (21)$$

skąd otrzymuje się, iż

$$D_c = X_c - t_{zw}, \quad (22)$$

oraz gdy wartości X_b , D_b i t_{pc} będą ze sobą powiązane następującą zależnością

$$\frac{T}{X_b + D_b} - 1 = \frac{T}{t_{cp}} - 1 \quad (23)$$

skąd otrzymuje się, iż

$$D_b = t_{pc} - X_b. \quad (24)$$

Z równania (1) wynika, że przy przekazywaniu impulsowania przez elementarny układ zmniejszanie wartości czasu trwania czynnej części impulsu następuje wówczas, gdy zniekształcenie wprowadzane przez przekąźnik impulsujący układu będzie posiadało wartość ujemną, tj. gdy $D_c < 0$; natomiast z równania (1a) wynika, że zmniejszanie wartości czasu trwania biernej części przekazywanych impulsów następuje wówczas, gdy wprowadzane przez przekąźnik impulsujący układu zniekształcenie będzie posiadało wartość dodatnią, tj. gdy $D_b > 0$. Zgodnie z powyższym stwierdzeniem może być napisana zależność

$$D_b > D_c \quad (25)$$

lub przy uwzględnieniu równań (22) i (24)

$$t_{pc} - X_b > X_c - t_{zw}. \quad (26)$$

Reasumując powyższe rozważania można stwierdzić, że przy zmianach wartości ϑ_1 impulsów na wejściu układu w granicach uwarunkowanych prawidłową pracą przekąźnika impulsującego, otrzymuje się zmianę wartości ϑ_2 impulsów na wyjściu tego układu w żądanych granicach wówczas, gdy wprowadzane przez układ zniekształcenia będą zawarte w granicach

$$X_c - t_{zw} < D < t_{pc} - X_b. \quad (27)$$

4. DOPUSZCZALNA MINIMALNA I MAKSYMALNA WARTOŚĆ STOSUNKU ϑ_1 IMPULSÓW WYBIERCZYCH NA WEJŚCIU ROZPATRYWANEGO UKŁADU IMPULSOWANIA ZE WZGLĘDU NA PRACĘ JEGO PRZEKĄŹNIKA KONTROLNEGO I SERYJNEGO

Prawidłowa praca przekąźnika kontrolnego w elementarnym układzie impulsowania wymaga, aby przekąźnik ten, pomimo przerw obwodu jego uzwojenia względnie zwarć tego uzwojenia w okresie czasu trwania

czynnej części impulsu pozostawał w stanie czynnym. Ponieważ w elementarnym układzie impulsowania przekaźnik kontrolny przyciąga bezpośrednio po przyciągnięciu przekaźnika impulsującego, przeto na początku czynnej części pierwszego impulsu wybierczego każdej serii strumień w obwodzie magnetycznym przekaźnika kontrolnego będzie posiadał wartość równą wartości dla stanu ustalonego. W okresie czasu trwania czynnej części impulsu strumień ten będzie zanikał, a w okresie czasu trwania biernej części impulsu będzie narastał. Wartość strumienia w obwodzie magnetycznym przekaźnika przy końcu czynnej i biernej części impulsu będzie zależna od wartości ich czasu trwania. Przy dostatecznie małej wartości ϑ_2 wartość strumienia przy końcu czynnej części poszczególnych impulsów serii będzie jednakowa. Natomiast przy stosunkowo dużej wartości ϑ_2 wartość spadku strumienia może okazać się większa niż wartość jego przyrostu. W tych warunkach strumień magnetyczny przy końcu czynnej części w kolejnych impulsach serii będzie posiadał coraz to mniejszą wartość. Ponieważ jednakże szybkość zanikania strumienia maleje w miarę zmniejszania się jego wartości, przeto po określonej liczbie impulsów zostanie osiągnięty stan równowagi, przy którym wartość spadku strumienia będzie równa wartości jego przyrostu. Może jednakże to nastąpić dla takiej wartości strumienia w obwodzie magnetycznym przekaźnika kontrolnego przy której już rozpoczyna się powrót jego kotwicy do położenia spoczynkowego. Biorąc pod uwagę, że obwód pracy przekaźnika kontrolnego jest kontrolowany zestykiem przekaźnika impulsującego, mogą zachodzić przypadki, iż ze względu na pracę przekaźnika kontrolnego, wartość $\vartheta_{2\max}$ będzie musiała podlegać pewnemu ograniczeniu. Jeżeli oznaczy się przez t_k dopuszczalną minimalną wartość czasu trwania biernej części t_{b2} impulsu wybierczego która powoduje, iż przy końcu czynnej części ostatniego impulsu serii strumień w obwodzie magnetycznym przekaźnika kontrolnego osiąga najmniejszą wartość, przy której kotwica przekaźnika jest jeszcze utrzymywana w stanie przyciągniętym, wówczas może być napisana następująca zależność

$$\vartheta_{2\max} = \frac{T - t_k}{t_k} = \frac{T}{t_k} - 1. \quad (28)$$

Prawidłowa praca przekaźnika seryjnego w elementarnym układzie impulsowania wymaga, aby przekaźnik ten przez czas trwania serii impulsów pozostawał w stanie czynnym, a po skończeniu serii impulsów przeszedł w stan bierny z określonym opóźnieniem.

W okresie czasu trwania czynnej części impulsu istnieje obwód zasilający uzwojenie tego przekaźnika i wobec tego w jego rdzeniu narasta strumień magnetyczny, natomiast w okresie trwania biernej części

impulsu obwód dla uzwojenia przekąznika jest przerwany, względnie jego uzwojenie jest zwarte, co powoduje stopniowy zanik strumienia magnetycznego w jego rdzeniu. Przy dostatecznie dużej wartości ϑ_2 przy końcu biernej części każdego impulsu serii strumień magnetyczny będzie posiadał tę samą wartość. Natomiast przy stosunkowo małej wartości ϑ_2 mogą zachodzić przypadki, że stan równowagi w końcowych impulsach serii zostanie osiągnięty przy takiej wartości strumienia w obwodzie magnetycznym przekąznika seryjnego, przy której rozpoczyna się już powrót jego kotwicy do stanu spoczynkowego. Ponieważ obwód pracy przekąznika seryjnego jest kontrolowany również zestykiem przekąznika impulsującego, przeto mogą zachodzić przypadki, że wartość $\vartheta_{2\min}$ będzie podlegać dodatkowemu ograniczeniu ze względu na pracę przekąznika seryjnego. Jeżeli oznaczy się przez t_s dopuszczalną minimalną wartość czasu trwania czynnej części t_{c2} impulsu wybiernego, która powoduje, iż przy końcu biernej części ostatniego impulsu serii strumień w obwodzie magnetycznym przekąznika seryjnego osiąga najmniejszą wartość, przy której kotwica przekąznika jest jeszcze utrzymywana w stanie przyciągniętym, wówczas może być napisana następująca zależność

$$\vartheta_{2\min} = \frac{t_s}{T - t_s} = \frac{1}{\frac{T}{t_s} - 1}. \quad (29)$$

Przyjmując, że na wyjściu układu otrzymuje się najmniejszą dopuszczalną wartość czasu trwania czynnej części impulsu, przy wprowadzaniu przez układ zniekształcenia o wartości D_c , zaś najmniejszą dopuszczalną wartość czasu trwania biernej części impulsu, przy wprowadzaniu przez układ zniekształcenia o wartości D_b , na podstawie równań (1) i (1a) mogą być dla rozpatrywanego przypadku napisane następujące zależności

$$(t_{c1})_{\min} = t_s - D_c \quad (30)$$

oraz

$$(t_{b1})_{\min} = t_k + D_b. \quad (31)$$

Równania (30) i (31) określają dopuszczalne minimalne wartości czasu trwania czynnej i biernej części impulsu wybiernego na wejściu rozpatrywanego elementarnego układu impulsowania ze względu na prawidłową pracę odpowiednio przekąznika kontrolnego i przekąznika seryjnego tego układu. Wobec powyższego, mogą być napisane następujące zależności

$$\vartheta_{1\max} = \frac{T - (t_k + D_b)}{t_k + D_b} = \frac{T}{t_k + D_b} - 1 \quad (32)$$

oraz

$$\vartheta_{1\min} = \frac{t_s - D_c}{T - (t_s - D_c)} = \frac{1}{\frac{T}{t_s - D_c} - 1} \quad (33)$$

czyli, że

$$\frac{1}{\frac{T}{t_s - D_c} - 1} \leq \vartheta_1 \leq \frac{T}{t_k + D_b} - 1. \quad (34)$$

Jak wynika z równań (32) i (33), że wzrostem wartości czasu t_k wartość $\vartheta_{1\max}$ maleje, natomiast ze wzrostem wartości czasu t_s wartość $\vartheta_{1\min}$ rośnie. Analogiczne konsekwencje wywołuje zmniejszanie wartości czasu T . Tak więc przy mniejszych wartościach czasów t_k i t_s oraz przy większych wartościach czasu T otrzymuje się szersze granice w których może się zmieniać wartość ϑ_1 .

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w p. 3 i zgodnie z równaniami (10), (7), (33) i (32) mogą być napisane następujące zależności

$$D_c = t_s - t_{zw} \quad (35)$$

oraz

$$D_b = t_{pc} - t_k. \quad (36)$$

Te same względy o których była mowa w p. 3 powodują istnienie zależności

$$D_b > D_c$$

lub też

$$t_{pc} - t_k > t_s - t_{zw}.$$

Na podstawie powyższej zależności oraz równań (35) i (36) można stwierdzić, że przy zmianach wartości ϑ_1 impulsów na wejściu układu w granicach uwarunkowanych prawidłową pracą przekaźnika impulsującego, otrzymuje się zmianę wartości ϑ_2 impulsów na wyjściu układu w granicach zapewniających prawidłową pracę jego przekaźników seryjnego i kontrolnego wówczas, gdy wprowadzone przez układ zniekształcenia będą zawarte w granicach

$$t_s - t_{zw} < D < t_{pc} - t_k \quad (37)$$

Porównanie ze sobą zależności (27) i (37) wskazuje, że granice dopuszczalnych zmian wartości zniekształceń należy ustalać ze względu na prawidłową pracę następnego elementu układu impulsowania — wówczas, gdy

$$t_k > X_b \quad \text{oraz} \quad t_s > X_c,$$

natomiast ze względu na prawidłową pracę przekaźnika kontrolnego i seryjnego rozpatrywanego układu — wówczas, gdy

$$X_b > t_k \quad \text{oraz} \quad X_c > t_s.$$

W przypadku zaś gdy:

a) $X_b < t_k$ zaś $X_c > t_s$, wówczas górna granica wartości D powinna być ustalona ze względu na prawidłową pracę następnego elementarnego układu, zaś dolna granica wartości D — ze względu na prawidłową pracę przekąźnika seryjnego;

wreszcie gdy:

b) $X_b > t_k$ zaś $X_c < t_s$, wówczas górna granica wartości D powinna być ustalona ze względu na prawidłową pracę przekąźnika kontrolnego, zaś dolna granica wartości D — ze względu na prawidłową pracę następnego elementarnego układu.

5. WARUNKI PRACY PIERWSZEGO ELEMENTARNEGO UKŁADU IMPULSOWANIA W UKŁADZIE ZŁOŻONYM

Jeśli rozpatrywany elementarny układ impulsowania występuje w złożonym układzie jako pierwszy, wówczas do wejścia tego układu są dołączane łącza abonenckie o różnych długościach, natomiast do wyjścia tego układu jest dołączone łącze międzycentralowe o określonej długości. Źródłem impulsów będzie tarcza numerowa aparatu telefonicznego wytwarzającego impulsy o określonym stosunku t_p/t_z i o czasie trwania $T = t_p + t_z$.

W tych warunkach pracy rozpatrywanego elementarnego układu impulsowania, wartość ϑ_1 impulsów na wejściu układu będzie stała i równa $\vartheta_1 = t_p/t_z$, a dopuszczalne minimalne czasy trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu układu powinny posiadać określone wartości X_{c1} i X_{b1} , natomiast wartość zniekształcenia wprowadzanego przez układ będzie zmienna, bowiem zależeć będzie ona od długości łączy abonenckich dołączanych do tego układu tzn. od ich oporności i pojemności.

Jeśli przy określonej długości łączy abonenckiego rozpatrywany układ wprowadza zniekształcenia o wartości D , wówczas na podstawie równań (1) i (1a) można napisać, iż

$$\text{oraz} \quad t_{c2} = t_p + D \quad (38)$$

$$\text{skąd} \quad t_{b2} = t_z - D, \quad (39)$$

$$\vartheta_2 = \frac{t_p + D}{t_z - D}. \quad (40)$$

Jak widać z równania (40), w przypadku gdy układ wnosi zniekształcenia ujemne, wówczas ze wzrostem wartości bezwzględnej tego zniekształcenia wartość ϑ_2 maleje, natomiast w przypadku gdy układ wnosi zniekształcenia dodatnie, wówczas ze wzrostem tego zniekształcenia wartość ϑ_2 wzrasta.

Dopuszczalną wartość $\vartheta_{2\min}$ osiąga się wówczas gdy t_{c2} osiąga wartość X_{c1} . Będzie to miało miejsce w przypadku, gdy układ wprowadzi zniekształcenia ujemne o dopuszczalnej maksymalnej wartości bezwzględnej, którą oznaczymy przez $|D'_1|$. Związek między tymi skrajnymi wartościami, na podstawie równań (38) i (40) może być wyrażony jako

$$X_{c1} = t_p + D'_1 \quad (41)$$

lub biorąc pod uwagę, że $D_1 < 0$ jako

$$X_{c1} = t_p - |D'_1|, \quad (41a)$$

oraz

$$\vartheta_{2\min} = \frac{t_p + D'_1}{t_z - D'_1} = \frac{X_{c1}}{T - X_{c1}} \quad (42)$$

Dopuszczalna maksymalna wartość bezwzględna zniekształcenia ujemnego może być określona z równania (41a) i wynosi

$$|D'_1| = t_p - X_{c1}. \quad (43)$$

Wartość bezwzględną każdego zniekształcenia ujemnego wprowadzanego przez przekąźnik impulsujący można przedstawić w postaci

$$|D_1| = t_{zw1} - t_{pc1} \quad (44)$$

gdzie t_{pc1} i t_{zw1} są to wartości czasów przyciągania i zwalniania przekąźnika impulsującego rozpatrywanego pierwszego elementarnego układu impulsowania.

Warunki prawidłowej pracy przekąźnika impulsującego rozpatrywanego układu wymagają spełnienia następujących zależności

$$t_z \geq t_{pc1} \quad (45)$$

oraz

$$t_p \geq t_{zw1}. \quad (45a)$$

Jak wynika z równania (41a), warunek osiągnięcia na wyjściu układu wartości $t_{c2} \geq X_{c1}$ wymaga, aby $|D_1| \leq |D'_1|$. Biorąc pod uwagę równania (43) i (44) warunek ten może być wyrażony następującą zależnością

$$t_{zw1} - t_{pc1} \leq t_p - X_{c1}$$

skąd otrzymuje się, iż

$$t_{pc1} \geq t_{zw1} - (t_p - X_{c1}). \quad (46)$$

Wykorzystując największą dopuszczalną wartość czasu zwalniania przekąźnika impulsującego, tzn. przyjmując

$$t_{zw1} = t_p$$

możemy zależność (46) napisać w postaci

$$t_{pc1} \geq X_{c1},$$

a po uwzględnieniu zależności (45) ostatecznie otrzymuje się, iż

$$X_{c1} \leq t_{pc1} \leq t_z. \quad (47)$$

Zależność (47) określa dopuszczalne granice zmian wartości czasu przyciągania przekaźnika impulsującego układu, przy których jeszcze zapewnione jest zarówno prawidłowe jego działanie jak i otrzymywanie na wyjściu tego układu wartości czasu trwania czynnej części impulsu nie mniejszej niż X_{c1} . Jak wynika z powyższej zależności, przy ustalonych wartościach t_p i t_z wzrost wartości X_{c1} powoduje ograniczenie zakresu zmian wartości t_{pc1} .

Dopuszczalną wartość $\vartheta_{2\max}$ otrzymuje się wówczas, gdy t_{b2} osiąga wartość X_{b1} , a więc gdy układ wprowadzi zniekształcenie dodatnie o dopuszczalnej maksymalnej wartości, którą oznaczymy przez D_1'' . Na podstawie równań (39) i (40), otrzymuje się, iż

$$X_{b1} = t_z - D_1'' \quad (48)$$

oraz

$$\vartheta_{2\max} = \frac{t_p + D_1''}{t_z - D_1''} = \frac{T - X_{b1}}{X_{b1}}. \quad (49)$$

Maksymalna dopuszczalna wartość wprowadzanego przez układ zniekształcenia dodatniego określona z równania (48) wynosi

$$D_1'' = t_z - X_{b1}, \quad (50)$$

zaś wartość każdego zniekształcenia dodatniego, wprowadzonego przez przekaźnik impulsujący wyraża się równaniem

$$D_1 = t_{pc1} - t_{zw1}. \quad (51)$$

Z równania (48) wynika, że warunek osiągnięcia, na wyjściu układu, wartości $t_{b2} \geq X_{b1}$ wymaga, aby $D_1 \leq D_1''$.

Biorąc pod uwagę równania (50) i (51), warunek ten może być wyrażony następującą zależnością

$$t_{pc1} - t_{zw1} \leq t_z - X_{b1}$$

skąd otrzymuje się, iż

$$t_{zw1} \geq t_{pc1} - (t_z - X_{b1}). \quad (52)$$

Wykorzystując największą dopuszczalną wartość czasu przyciągania przez przekaźnik impulsującego, wynoszącą $t_{pc1} = t_z$ możemy zależność (52) napisać w postaci

$$t_{zw1} \geq X_{b1}. \quad (53)$$

Uwzględniając zaś oba warunki prawidłowej pracy przekaźnika impulsującego wyrażone zależnościami (45) i (45a), otrzymuje się następujący zakres zmian wartości czasu zwalniania przekaźnika impulsującego

$$X_{b1} \leq t_{zw1} \leq t_p. \quad (54)$$

Zależność (54) określa dopuszczalne granice zmian wartości czasu zwalniania przekaźnika impulsującego układu, przy których jest jeszcze zapewnione zarówno prawidłowe jego działanie jak i otrzymywanie na wyjściu tego układu wartości czasu trwania biernej części impulsu nie mniejszej niż X_{b1} . Jak wynika z powyższej zależności, przy ustalonych wartościach t_p i t_z , wzrost wartości X_{b1} , powoduje ograniczenie zakresu zmian wartości t_{zw1} .

Zależnie od typu przekaźnika impulsującego, a zwłaszcza od jego obciążenia, a następnie zależnie od zastosowanego układu impulsowania i od przyjętych wartości czasów trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu tego układu, mogą zachodzić przypadki, gdy wartości $\vartheta_{2\min}$ i $\vartheta_{2\max}$ są osiągane bądź tylko w zakresie zniekształceń dodatnich, bądź tylko w zakresie zniekształceń ujemnych, bądź wreszcie, gdy wartość $\vartheta_{2\min}$ osiągana jest w zakresie zniekształceń ujemnych, zaś wartość $\vartheta_{2\max}$ osiągana jest w zakresie zniekształceń dodatnich. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami granicznych dopuszczalnych wartości zniekształceń można stwierdzić że:

a) pierwszy przypadek będzie miał miejsce wówczas gdy

$$D'_1 > 0 \quad \text{oraz} \quad D''_1 > 0, \quad \text{przy czym} \quad D'_1 < D''_1,$$

b) drugi przypadek będzie miał miejsce gdy

$$D'_1 < 0 \quad \text{oraz} \quad D''_1 < 0, \quad \text{przy czym} \quad |D'_1| > |D''_1|,$$

c) wreszcie trzeci przypadek będzie miał miejsce gdy

$$D'_1 < 0 \quad \text{zaś} \quad D''_1 > 0.$$

Otrzymane zależności (47) i (54):

- a) dla określonego typu przekaźnika impulsującego i stosowanego układu impulsowania, przy określonym czasie trwania czynnej i biernej części impulsu T na wejściu oraz przy przyjętych wartościach minimalnych czasów trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu — pozwalają ustalić graniczne długości łączы abonenckich dołączonych do układu,
- b) przy określonych granicznych długościach łączы abonenckich i dla określonego czasu trwania czynnej i biernej części impulsu T na wejściu, oraz przy przyjętych wartościach minimalnych czasów trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu — pozwalają ustalić typ, a zwłaszcza obciążenie przekaźnika impulsującego, jak również typ układu impulsowania [3]

Reasumując wyżej przeprowadzone rozważania można stwierdzić, że elementarny układ impulsowania występujący jako pierwszy w układzie złożonym, mimo że na wejściu posiada impulsy o ustalonej wartości stosunku t_p/t_z to jednak ze względu na różną długość łącz abonenckich do niego dołączanych — będzie wytwarzał na wyjściu impulsy o różnych wartościach stosunku ϑ_2 zawartych w granicach od $\vartheta_{2\min}$ do $\vartheta_{2\max}$.

6. WARUNKI PRACY DRUGIEGO ELEMENTARNEGO UKŁADU IMPULSOWANIA W UKŁADZIE ZŁOŻONYM

Jeśli rozpatrywany elementarny układ impulsowania występuje w określonym złożonym układzie jako drugi, wówczas do wejścia i do wyjścia tego układu są dołączone łącza międzycentralowe o określonej długości. W tych warunkach zniekształcenie wprowadzane przez układ będzie posiadało określoną stałą wartość D_c , dopuszczalne zaś minimalne czasy trwania czynnej i biernej części impulsu na wyjściu tego układu będą posiadały określone wartości. Biorąc pod uwagę, że pierwszy elementarny układ impulsowania przekazuje do układu drugiego impulsy, których wartość ϑ_2 może się wahać w granicach określonych równaniami (42) i (49), jest oczywiste, że pomimo stałej wartości wnoszonego zniekształcenia D_c , na wyjściu drugiego elementarnego układu impulsowania będą otrzymywane impulsy również o różnych wartościach stosunku $\vartheta_3 = \frac{t_{c3}}{t_{b3}}$.

Przy wprowadzeniu przez układ zniekształcenia o wartości D_c , na podstawie równań (1) i (1a), mogą być napisane następujące zależności ogólne

$$t_{c3} = t_{c2} + D_c \quad \text{oraz} \quad t_{b3} = t_{b2} - D_c.$$

Zgodnie z wyżej przeprowadzonymi rozważaniami, na wyjściu rozpatrywanego układu najmniejsza wartość czasu trwania czynnej części impulsu może być wyrażona równaniem

$$(t_{c3})_{\min} = X_{c1} + D_c = t_p + D'_1 + D_c, \quad (55)$$

zaś najmniejsza wartość czasu trwania biernej części impulsu może być wyrażona równaniem

$$(t_{b3})_{\min} = X_{b1} - D_c = t_z - D''_1 - D_c = t_z - (D''_1 + D_c). \quad (56)$$

Ze względu na prawidłową pracę następnego (trzeciego) elementarnego układu impulsowania, jak również i ze względu na prawidłową pracę przekazników kontrolnego i seryjnego rozpatrywanego (drugiego) układu, powinny być spełnione następujące zależności

$$(t_{c3})_{\min} \geq X_{c2}$$

oraz

$$(t_{b3})_{\min} > X_{b2},$$

gdzie X_{c2} i X_{b2} są to dopuszczalne minimalne wartości czasów trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu rozpatrywanego układu, ustalone wyżej wymienionymi względami.

Graniczne wartości ϑ_3 impulsów na wyjściu układu drugiego, uzyskane przy granicznych wartościach ϑ_2 impulsów na wejściu tego układu, mogą być określone na podstawie równań (55) i (56). Wynoszą one

$$\vartheta_{3\min} = \frac{t_p + (D'_1 + D_c)}{t_z - (D'_1 + D_c)} \quad (57)$$

oraz

$$\vartheta_{3\max} = \frac{t_p + (D''_1 + D_c)}{t_z - (D'_1 + D_c)} \quad (58)$$

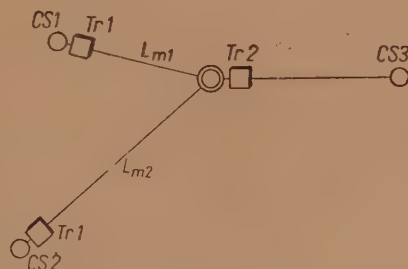
W przypadku, gdy

$$(t_{c3})_{\min} > X_{c2} \quad \text{oraz} \quad (t_{b3})_{\min} > X_{b2},$$

istniejące rezerwy czasowe

$$\Delta X_{c2} = (t_{c3})_{\min} - X_{c2} \quad \text{i} \quad \Delta X_{b2} = (t_{b3})_{\min} - X_{b2}$$

mogą być wykorzystywane w przypadkach, gdy do rozpatrywanego układu od strony wejścia będą dołączane łącza międzycentralowe różnych długości. W warunkach eksploatacyjnych, tego rodzaju przypadki mogą mieć miejsce wówczas, gdy elementarny układ impulsowania należy do translacji znajdującej się w centrali głównej układu wielocentralowego np. jak na rys. 1. Jak widać z rysunku, przy zestawianiu połą-



Rys. 1. Układ wielocentralowy.

czenia między abonentami central CS1 i CS3, do drugiego elementarnego układu impulsowania (translacja Tr2) od strony wejścia będzie dołączone łącze międzycentralowe o długości L_{m1} , zaś przy zestawianiu połączenia między abonentami central CS2 i CS3, do tego elementarnego układu będzie dołączone łącze międzycentralowe o długości L_{m2} .

Graniczne długości tych łączy międzycetnralowych, tak jak i łączy abonenckich, będą ustalone przez dopuszczalne graniczne wartości zniekształceń, jakie wprowadza rozpatrywany układ.

Jeśli przyjmie się, że przy wprowadzaniu przez układ zniekształcenia ujemnego o wartości D'_2 na wyjściu z układu otrzymuje się dopuszczalną minimalną wartość czasu trwania czynnej części impulsu X_{c2} wówczas może być napisane równanie

$$X_{c2} = X_{c1} + D'_2 = t_p + D'_1 + D'_2$$

skąd graniczna dopuszczalna wartość tego zniekształcenia wynosi

$$D'_2 = X_{c2} - (t_p + D'_1) \quad (59)$$

zaś dopuszczalna wartość $\vartheta_{3\min}$ impulsów na wyjściu układu wyniesie

$$\vartheta_{3\min} = \frac{t_p + (D'_1 + D'_2)}{t_z - (D'_1 + D'_2)} = \frac{X_{c2}}{T - X_{c2}} \quad (60)$$

Ponieważ przy $D'_2 < 0$ ma miejsce następująca zależność

$$X_{c2} < X_{c1},$$

przeto dopuszczalna maksymalna wartość bezwzględna wnoszonego przez układ zniekształcenia wyniesie

$$|D'_2| = X_{c1} - X_{c2}. \quad (61)$$

Wartość bezwzględną każdego zniekształcenia ujemnego wprowadzonego przez drugi elementarny układ, można wyrazić jako

$$|D_2| = t_{zw2} - t_{pc2}. \quad (62)$$

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w p. 5 oraz w oparciu o równanie (61) i (62) może być napisana zależność

$$t_{zw2} - t_{pc2} \leq X_{c1} - X_{c2}$$

skąd

$$t_{pc2} \geq t_{zw2} - X_{c1} + X_{c2}. \quad (63)$$

Prawidłowa praca przekaznika impulsującego drugiego elementarnego układu wymaga spełnienia następujących zależności

$$t_{pc2} \leq X_{b1} \quad (64)$$

$$t_{zw2} \leq X_{c1}. \quad (65)$$

Wykorzystując największą dopuszczalną wartość czasu t_{zw2} czyli przyjmując, że

$$t_{zw2} = X_{c1},$$

można zależność (63) napisać w postaci

$$t_{pc2} \geq X_{c2}, \quad (66)$$

Biorąc pod uwagę zależności (64) i (66), ostatecznie otrzymuje się, i

$$X_{c2} \leq t_{pc2} \leq X_{b1}. \quad (67)$$

Zależność (67) określa dopuszczalne granice zmian wartości czasu przyciągania przekaźnika impulsującego drugiego elementarnego układu impulsowania, przy których zapewnione jest zarówno jego prawidłowe działanie jak i otrzymywanie, na wyjściu układu, wartości czasu trwania czynnej części impulsu nie mniejszej niż X_{c2} .

Gdy minimalną dopuszczalną wartość czasu trwania biernej części impulsu na wyjściu rozpatrywanego układu otrzymuje się przy wprowadzeniu przezeń zniekształcenia dodatniego o dopuszczalnej maksymalnej wartości D_2'' wówczas

$$X_{b2} = X_{b1} - D_2'' \quad (68)$$

lub po uwzględnieniu równania (48)

$$X_{b2} = t_z - D_1' - D_2'' = t_z - (D_1' + D_2'') \quad (69)$$

zaś

$$\vartheta_{3\max} = \frac{t_p + (D_1' + D_2'')}{t_z - (D_1' + D_2'')} = \frac{T - X_{b2}}{X_{b2}} \quad (70)$$

Ponieważ wartość każdego zniekształcenia dodatniego wprowadzonego przez rozpatrywany układ może być wyrażona równaniem

$$D_2 = t_{pc2} - t_{zw2},$$

przełożono w oparciu o rozważania przeprowadzone w p. 5 i biorąc pod uwagę równanie (68), może być napisana następująca zależność

$$t_{pc2} - t_{zw2} \leq X_{b1} - X_{b2} \quad (71)$$

skąd

$$t_{zw2} \geq t_{pc2} - X_{b1} + X_{b2}. \quad (71a)$$

Wykorzystując największą dopuszczalną wartość czasu t_{pc2} tzn. przyjmując, że

$$t_{pc2} = X_{b1}$$

zależność (71a) można napisać w postaci

$$t_{zw2} \geq X_{b2}. \quad (72)$$

Uwzględniając powyższą zależność oraz zależność (65) otrzymuje się następujący zakres zmian wartości czasu t_{zw2}

$$X_{b2} \leq t_{zw2} \leq X_{c1} \quad (73)$$

Zależność (73) określa dopuszczalne granice zmian wartości czasu zwolnienia przekaźnika impulsującego drugiego elementarnego układu, przy których jest zapewnione zarówno prawidłowe jego działanie jak i otrzymywanie na wyjściu układu wartości czasu trwania biernej części nie mniejszej niż X_{b2} .

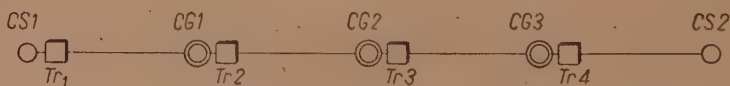
Otrzymane zależności (67) i (73):

- a) dla określonego typu przekaźnika impulsującego i stosowanego układu impulsowania, przy określonym czasie trwania czynnej i biernej części impulsów na wejściu układu oraz przy przyjętych wartościach minimalnych czasów trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu — pozwalają ustalić graniczne długości łączy międzycentralowych dołączanych do układu;
- b) przy określonych granicznych długościach łączy międzycentralowych i dla określonego czasu trwania czynnej i biernej części impulsów na wejściu układu, oraz przyjętych wartościach minimalnych czasów trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu — pozwalają ustalić typ, a zwłaszcza obciążenie przekaźnika impulsującego, jak również typ układu impulsowania [3].

7. WARUNKI PRACY POŚREDNICH ELEMENTARNYCH UKŁADÓW IMPULSOWANIA W UKŁADZIE ZŁOŻONYM

W wyżej podanym przykładowo układzie wielocentralowym (rys. 1), złożony układ impulsowania jest utworzony z trzech elementarnych układów, z których pierwszy znajduje się w translacji Tr 1, drugi — w translacji Tr 2, i wreszcie trzeci w zespole wybieraka grupowego, względnie w zespole wybieraka liniowego centrali CS3.

W bardziej złożonych układach wielocentralowych mogą zachodzić takie przypadki, że przy zestawianiu połączenia zostanie utworzony złożony układ impulsowania, w którym poza pierwszym i ostatnim elementarnym układem impulsowania wystąpi większa liczba elementarnych układów pośrednich. Dla określonego układu wielocentralowego, na rys. 2, podany jest złożony układ impulsowania, w którym występują



Rys. 2. Układ wielocentralowy złożony.

trzy pośrednie elementarne układy translacji Tr 2, Tr 3 i Tr 4, znajdujących się w centralach CG1, CG2 i CG3. We wszystkich tych elementarnych układach pośrednich, do wejść dołączane są — w przypadku ogólnym — łączy międzycentralowe o różnych długościach, natomiast wyjście każdego z tych układów jest na stałe związane z łączem międzycentralowym o określonej długości.

A zatem można stwierdzić, że w złożonym układzie impulsowania poszczególne pośrednie elementarne układy impulsowania mają podobne

warunki pracy i wobec tego otrzymane w p. 6 zależności dla drugiego elementarnego układu impulsowania mogą być stosowane również i dla każdego elementarnego układu pośredniego.

8. WARUNKI PRACY OSTATNIEGO ELEMENTARNEGO UKŁADU IMPULSOWANIA W UKŁADZIE ZŁOŻONYM

Jeśli rozpatrywany elementarny układ impulsowania występuje w złożonym układzie jako ostatni, wówczas, tak jak to uprzednio już zostało stwierdzone, jego wejście będzie połączone z łączem międzycentralowym o określonej długości, zaś wyjście — z uzwojeniem elektromagnesu wybieraka. W tych warunkach pracy, wprowadzane przez układ zniekształcenie będzie posiadało określoną wartość stałą D_n , jak również dopuszczalne minimalne czasy trwania czynnej i biernej części impulsów na wyjściu tego układu będą posiadały określone stałe wartości X_{cn} i X_{bn} . Biorąc pod uwagę, że poprzedni elementarny układ pośredni przekazuje do rozpatrywanego ostatniego układu impulsy, których wartość ϑ_{n-1} waha się w określonych granicach, otrzymuje się sytuację, w której pomimo stałej wartości zniekształcenia wnoszonego przez ostatni układ, na jego wyjściu będą otrzymywane impulsy o różnych wartościach ϑ_n . A zatem dla rozpatrywanego układu mogą być napisane następujące zależności ogólne

$$(t_{cn})_{\min} = X_{cn-1} + D_n \quad (74)$$

oraz

$$(t_{bn})_{\min} = X_{bn-1} - D_n \quad (75)$$

gdzie X_{cn-1} i X_{bn-1} są to minimalne dopuszczalne czasy trwania czynnej i biernej części impulsów na wejściu ostatniego elementarnego układu impulsowania.

Na podstawie równań (2) i (2a) oraz biorąc pod uwagę, że $t_{c1} = t_p$ i $t_{b1} = t_z$ dopuszczalne minimalne wartości czasów X_{cn-1} i X_{bn-1} mogą być wyrażone następującymi równaniami

$$X_{cn-1} = t_p + \sum_{x=1}^{X=n-1} D'_x \quad (76)$$

oraz

$$X_{bn-1} = t_z - \sum_{x=1}^{X=n-1} D''_x \quad (77)$$

Ze wzoru (76) wynika, że X_{cn-1} osiąga najmniejszą wartość wówczas, gdy składnik

$$\sum_{x=1}^{X=n-1} D'_x < 0$$

i posiada największą wartość bezwzględną, co ma miejsce w przypadku,

gdy każdy z $n-1$ elementarnych układów impulsowania wnosi zniekształcenie ujemne. Dla tego przypadku równanie (76) może być napisane w postaci

$$X_{cn-1} = t_p - \sum_{x=1}^{x=n-1} |D'_x|. \quad (78)$$

Natomiast ze wzoru (77) wynika, że X_{bn-1} osiąga najmniejszą wartość wówczas, gdy składnik

$$\sum_{x=1}^{x=n-1} D''_x > 0$$

i posiada największą wartość, co ma miejsce w przypadku wprowadzania przez każdy z $n-1$ elementarnych układów zniekształcenia dodatniego. Wobec tego, na wyjściu rozpatrywanego elementarnego układu otrzyma się minimalną dopuszczalną wartość czasu trwania czynnej części impulsu wówczas, gdy również i ten układ wniesie zniekształcenie ujemne, którego maksymalną dopuszczalną wartość bezwzględną oznaczyć można przez $|D'_n|$, natomiast minimalną dopuszczalną wartość czasu trwania biernej części impulsu otrzyma się wówczas, gdy również i ten układ wniesie zniekształcenie dodatnie, o maksymalnej dopuszczalnej wartości D''_n .

Podstawiając do równań (74) i (75) wartości X_{cn-1} i X_{bn-1} określone równaniami (78) i (77) oraz stosując wyżej przyjęte oznaczenie maksymalnych dopuszczalnych wartości zniekształceń wprowadzanych przez ostatni układ, otrzymuje się, iż

$$X_{cn} = t_p - \sum_{x=1}^{x=n-1} |D'_x| - |D'_n| = t_p - \sum_{x=1}^{x=n} |D'_x| = t_p - |D'_s| \quad (79)$$

oraz

$$X_{bn} = t_z - \sum_{x=1}^{x=n-1} D''_x - D''_n = t_z - \sum_{x=1}^{x=n} D''_x = t_z - D''_s \quad (80)$$

gdzie

$|D'_s| = \sum_{x=1}^{x=n} |D'_x|$ — dopuszczalna maksymalna wartość bezwzględna sumarycznego zniekształcenia ujemnego, wprowadzanego przez złożony układ impulsowania,

$D''_s = \sum_{x=1}^{x=n} D''_x$ — dopuszczalna maksymalna wartość sumarycznego zniekształcenia dodatniego wprowadzanego przez złożony układ impulsowania.

Dopuszczalne minimalne i maksymalne wartości ϑ_n impulsów na wyjściu układu będą wyrażać się następującymi wzorami

$$\vartheta_{n \min} = \frac{t_p - |D'_s|}{t_z + |D'_s|} = \frac{X_{cn}}{T - X_{cn}} \quad (81)$$

zaś

$$\vartheta_{n\max} = \frac{t_p + D_s''}{t_z - D_s''} = \frac{T - X_{bn}}{X_{bn}}. \quad (82)$$

Dla ostatniego elementarnego układu impulsowania minimalne dopuszczalne wartości czasów X_{cn} i X_{bn} określa się w oparciu o wartości — odpowiednio — czasu przyciągania t_{pce} i czasu zwalniania t_{zwe} elektromagnesu wybieraka, przy czym między tymi wartościami powinna istnieć zależność

$$t_{pce} \leq X_{cn} \quad (83)$$

oraz

$$t_{zwe} \leq X_{bn}. \quad (84)$$

Podstawiając do tych zależności wartości X_{cn} i X_{bn} z równań (79) i (80) i uwzględniając, że wartości rezerw czasowych dla przyciągania i zwalniania elektromagnesu wybieraka, istniejące na wejściu złożonego układu impulsowania [2], wynoszą

$$\Delta t_{pc} = t_p - t_{pce}$$

$$\Delta t_{zw} = t_z - t_{zwe}$$

otrzymuje się następujące zależności

$$|D_s'| \leq \Delta t_{pc} \quad \text{oraz} \quad D_s'' \leq \Delta t_{zw}.$$

Na podstawie równań (79) i (80) i przy uwzględnieniu równań (76) i (77), graniczne dopuszczalne wartości zniekształceń wprowadzanych przez ostatni elementarny układ mogą być wyrażone równaniami

$$|D_n'| = X_{cn-1} - X_{cn} \quad (85)$$

oraz

$$D_n'' = X_{bn-1} - X_{bn}. \quad (86)$$

Oznaczając przez t_{pcn} i t_{zwn} czasy przyciągania i zwalniania przełącznika impulsującego ostatniego elementarnego układu, można wartość bezwzględną wnoszonego przezeń zniekształcenia ujemnego ogólnie wyrazić równaniem

$$|D_n| = t_{zwn} - t_{pcn} \quad (87)$$

zaś wartość zniekształcenia dodatniego — równaniem

$$D_n = t_{pcn} - t_{zwn}. \quad (88)$$

Na podstawie wyżej podanych równań (85), (86), (87) i (88) i zgodnie z uprzednio podanym uzasadnieniem (p. 5), mogą być napisane następujące zależności

$$t_{zwn} - t_{pcn} \leq X_{cn-1} - X_{cn} \quad (89)$$

oraz

$$t_{pcn} - t_{zwn} \leq X_{bn-1} - X_{bn}. \quad (90)$$

Презкажнік імпульсавы ў астаньняга элемэнтарнага ўкладу будзе правільна працаваў о іле зостану захаваны ніжэй паданы залежнасьці

$$t_{pcn} \leq X_{bn-1} \quad (91)$$

$$t_{zwn} \leq X_{cn-1} \quad (92)$$

Пры выкарыстаньні максымальных дапусьчальных вартасьці t_{pcn} і t_{zwn} , на падставе залежнасьці (89), (90), (91) і (92) атрымліваецца наступныя дапусьчальныя граніцы змянення вартасьці часоў t_{pcn} і t_{zwn}

$$X_{cn} \leq t_{pcn} \leq X_{bn-1} \quad (93)$$

$$X_{bn} \leq t_{zwn} \leq X_{cn-1} \quad (94)$$

Кафэдра Тэлеахіі Лячэньнявой
Палітэхнікі Варшаўскай

WYKAZ LITERATURY

1. Palczewski A.: *Analiza parametrów wpływających na wartość zniekształcenia czasowego impulsów przekazywanych przez przekaźnik impulsujący*, Zesz. Nauk. Elektryka 26, Wyd. Polit. Warsz. 1961 r.
2. Palczewski A.: *Określenie granicznych wartości parametrów limitujących rezerwę czasową w działaniu elektromagnesów wybieraków*, Zesz. Nauk. Elektryka 27, Wyd. Polit. Warsz. 1961 r.
3. Palczewski A.: *Wpływ układu impulsowania na pracę przekaźnika impulsującego*, Zesz. Nauk. Elektryka 27, Wyd. Polit. Warsz. 1961 r.

АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ И СЛОЖНЫХ СХЕМ ИМПУЛЬСИРОВАНИЯ ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

В статье после введения в тему и обожждения понятия искажения во времени выборочного импульса определен диапазон, в котором может содержаться отношение периода активной к периоду пассивной составляющей импульса на входе и выходе элементарной схемы импульсирования в зависимости от вида его работы как импульсирующего реле или контрольного и серийного реле и в зависимости от работы следующей элементарной схемы импульсирования.

Определен также диапазон изменений величины искажения импульса во времени введенного рассматриваемой элементарной схемой импульсирования, при котором еще обеспечена правильная работа рассматриваемой схемы и следующей схемы импульсирования.

Далее проанализирована работа элементарной схемы импульсирования для случаев когда она выступает в последовательном соединении элементарных схем в качестве первого, текущего и конечного звена.

В результате исследования для каждого из этих случаев определены границы возможных изменений времени притяжения и отпускания импульсирующего реле схемы, что является предпосылкой определения предельной длины линии связи абонентов и центральных станций присоединяемых к элементарной схеме импульсирования, для определения нагрузки импульсирующего реле и избрания соответствующего типа схемы импульсирования в линиях телефонной связи.

ANALYSIS OF ELEMENTARY AND COMPOSITE D.C. DIALLING CIRCUITS

The article begins with some introductory considerations followed by discussion on the definition of time distortion of numerical impulses. Variation limits of the break to make period ratio of the impulse at the input and output of the elementary dialling circuit are given, taking into account working condition of the A (line), B (control) and C (digit check) relays as well as interworking with the next elementary dialling circuit.

Variation limits of the time distortion value caused by the elementary dialling circuit are determined so as to safeguard reliable performance of this and of the next elementary dialling circuit.

Working conditions analysis of the elementary dialling circuit is presented, considering this circuit as an initial, intermediate and terminal link in a series connection of several such circuits. Thus, for all three cases value limits of operate and release times of the A (line) relay in the said circuit are determined, which is a basis for evaluating a maximum length of subscribers' and junction lines connected to the elementary dialling circuit. This enables also to determine the permissible load of the line relay and to choose a suitable type of the dialling circuit in telephone repeaters.

621.392.41

T. ZAGAJEWSKI

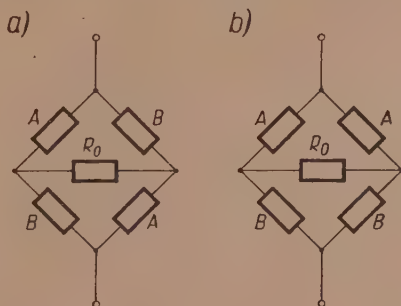
Symetria elektryczna nieliniowych obwodów o budowie symetrycznej

Rękopis dostarczono 16. 12. 1960.

Przeprowadzono analizę obwodów o symetrii względem punktu środkowego albo względem osi, zawierających dwa elementy nieliniowe o charakterze oporności rzeczywistych. Określono warunki istnienia symetrii elektrycznej obwodu polegającej na równości prądów i napięć w odpowiadających sobie wzajemnie elementach obwodu. Powodem niezachowania warunków symetrii elektrycznej może być opadająca charakterystyka elementów nieliniowych, czyli ich właściwości oporności ujemnych, istniejące jako wrodzona właściwość tych elementów lub wniesiona przez odpowiednie sprzężenie zwrotne.

1. WSTĘP

W wielu urządzeniach spotyka się obwody o dwóch jednakowych elementach nieliniowych, mające budowę symetryczną, czyli dające się sprowadzić do układu mostka o parami jednakowych elementach. Można tu rozróżnić dwojakiego rodzaju symetrię budowy obwodu:



Rys. 1. Obwody mostkowe symetryczne: a — o symetrii względem punktu środkowego, b — o symetrii względem osi pionowej.

a — symetrię względem punktu środkowego (rys. 1a), polegającą na tym, że w takim układzie przeciwległe elementy mostka są parami jednakowe;

b — symetrię względem osi, np. pionowej (rys. 1b), polegającą na tym, że przyległe elementy mostka są parami jednakowe.

Mostki symetryczne obu typów są często spotykane w różnych urządzeniach, przy czym elementami nieliniowymi mogą być np. lampy elektronowe, tranzystory, termistory, żarówki itp.

Obwody o symetrii względem punktu środkowego (rys. 1a) są stosowane jako układy do stabilizacji napięcia lub do wykrywania zmian napięcia, przy czym jako elementów nieliniowych używa się termistorów lub żarówek. Teoria takich obwodów jest szczegółowo opracowana przez wielu autorów, np. Milsztejna [3], Patchetta [5], Nagengasta [4]. Patchett np. przeprowadza szczegółową analizę takiego obwodu dla elementów nieliniowych, których charakterystyka daje się wyrazić wzorem

$$u = k \cdot i^n$$

dla dowolnej wartości parametru n . Patchett zakłada z góry elektryczną symetrię obwodu, podobnie zresztą jak inni autorzy, co w zupełności potwierdzają pomiary.

Bardzo podobne właściwości mają obwody o symetrii względem osi pionowej (rys. 1b) używane w wielu układach, np. we wzmacniaczach przeciwsoobnych prądu stałego, woltomierzach lampowych, układach pomiarowych itp. I w tych przypadkach symetria elektryczna obwodu jest uważana za oczywistą właściwość układu. Natomiast wiadomo, że np. wprowadzenie skrzyżowanych sprzężeń zwrotnych z anody jednej lampy układu na siatkę przeciwległej lampy powoduje powstanie bistabilnych właściwości układu; staje się on układem, w którym nie może istnieć stan symetrii elektrycznej. Właściwości takie wyjaśnia się działaniem dodatniego sprzężenia zwrotnego albo istnieniem oporności ujemnych (np. Macura [2]), a możliwość przeskoku podobnych układów z jednego stanu skrajnego w drugi przez istnienie punktu przegięcia charakterystyki elementów nieliniowych (np. Drobów [1]).

Wobec tego, że układy o budowie symetrycznej mogą się zachowywać — mimo pozornego podobieństwa układów — w sposób zasadniczo różny, warto określić jednolite kryterium istnienia symetrii elektrycznej takich układów, co w pewnych przypadkach może być jednoznaczne z kryterium ich stabilności.

2. UKŁADY O SYMETRII WZGLĘDEM PUNKTU ŚRODKOWEGO

Rozpatrzmy obwód zawierający (rys. 2) w gałęziach przeciwległych dwa elementy nieliniowe o właściwościach oporności rzeczywistych oraz o znanych i jednakowych charakterystykach statycznych

$$u = f(i).$$

Pozostałe gałęzie główne obwodu zawierają jednakowe oporności R ; poziomą przekątną obciąża oporność R_0 , stałe zaś napięcie zasilające jest włączone na pionową przekątną obwodu.

Zakładamy rozpyływ prądów pokazany na rys. 2, czyli niesymetryczny, gdyż $I_1 \neq I'_1$.

Porównanie spadków napięć lewej i prawej gałęzi obwodu daje równanie

$$u(I_1) + R(I_1 - I_0) = u(I'_1) + R(I'_1 - I_0). \quad (1)$$

Po uporządkowaniu równanie to przybiera postać

$$u(I_1) - u(I'_1) = R(I'_1 - I_1) \quad (2)$$

przy czym ten warunek musi być zachowany dla dowolnego stanu pracy.

Równanie (2) jest w sposób oczywisty spełnione dla

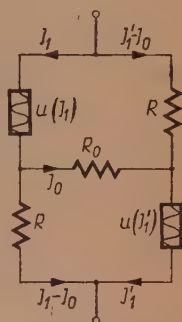
$$I_1 = I'_1 = I \quad \text{gdyż wtedy} \quad u(I_1) = u(I'_1).$$

Jest to stan pełnej symetrii elektrycznej układu, charakteryzujący się równością prądów i napięć w parami jednakowych elementach obwodu. Spełnienie równania (2) dla $I_1 = I'_1$ nie jest jednak dowodem, że w układzie wystąpi rzeczywiście stan symetrii, gdyż mogą istnieć również i inne pary wartości I_1, I'_1 spełniające równanie (2). W takim przypadku może istnieć kilka stanów pracy układu, z których praktycznie mogą się utrzymać te, które spełniają dodatkowe warunki stabilności, określane znanymi metodami.

Zajmiemy się najpierw warunkami, w których stan symetrii elektrycznej układu jest jedynym możliwym stanem pracy. Odpowiada to przypadkowi, gdy wartość $I_1 = I'_1$ jest jedynym rozwiązaniem równania (2). Przypadek ten zachodzi dla pewnych rodzajów funkcji $u(i)$, które poniżej omówimy.

I. Załóżmy, że charakterystyka elementu nieliniowego jest dowolną funkcją monotoniczną rosnącą. Dla takiej funkcji, jeżeli $I_1 > I'_1$, to $u(I_1) > u(I'_1)$. W tym przypadku lewa strona równania (2) ma wartość dodatnią, prawa zaś ujemną (gdyż oczywiście $R > 0$), wobec czego równanie (2) nie może być spełnione dla $I_1 \neq I'_1$.

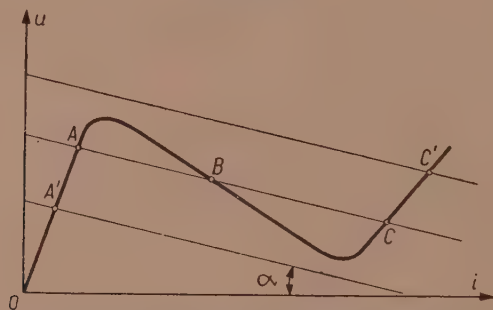
Z tego wynika, że dla obwodu o elementach nieliniowych, mających charakterystykę statyczną o postaci funkcji monotonicznej rosnącej (a więc dla charakterystyk typu $u = k \cdot i^n$ dla każdego $n > 0$) zachodzi zawsze przypadek symetrii elektrycznej. Taki przypadek zachodzi więc przy użyciu jako elementów nieliniowych termistorów, żarówek itp. stosowanych w układach stabilizacji napięcia lub prądu.



Rys. 2. Obwód symetryczny o elementach nieliniowych w gałęziach przeciwnych.

II. Jeżeli założymy, że charakterystyka elementu nieliniowego posiada w pewnym obszarze odcinek opadający (czyli ma właściwości oporności ujemnej), to dla $I_1 > I'_1$ jest $u(I_1) < u(I'_1)$ a więc obie strony równania (2) mają wartości ujemne i mogą istnieć pary wartości I_1, I'_1 spełniające to równanie a różne od $I_1 = I'_1$. Wyznaczenie tych wartości można przeprowadzić np. graficznie, szukając punktów przecięcia z charakterystyką elementu nieliniowego (rys. 3) prostej nachylonej do osi poziomej pod kątem

$$\alpha = \arctg R.$$



Rys. 3. Graficzne wyznaczanie możliwych stanów pracy obwodu symetrycznego: punkty A' i C' — jedyne możliwe punkty pracy, punkty A, B, C — trzy możliwe punkty pracy.

Współrzędne tych punktów przecięcia spełniają — jak łatwo można stwierdzić — równanie (2).

Zależnie od kształtu charakterystyki elementu nieliniowego, wartości oporności R i napięcia zasilania otrzymuje się jeden lub kilka punktów przecięcia prostej z charakterystyką. W przypadku istnienia jednego punktu przecięcia wyznacza on jedyną możliwą wartość prądu, czyli $I_1 = I'_1 = I$, a więc odpowiada to stanowi symetrii elektrycznej układu. Jeżeli istnieje kilka punktów przecięcia, to w zasadzie możliwy jest asymetryczny rozpływ prądów, przy czym jego ustalenie wymaga zbadania stabilności poszczególnych stanów pracy.

3. UKŁADY O SYMETRII WZGLĘDEM OSI

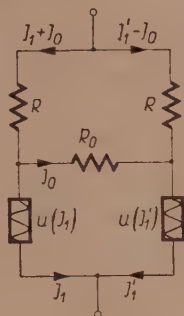
Jeżeli elementy mostka mają konfigurację pokazaną na rys. 4, to porównanie napięć obu gałęzi prowadzi do równania

$$u(I_1) + R(I_1 + I_0) = u(I'_1) + R(I'_1 - I_0). \quad (3)$$

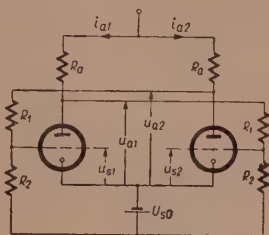
Po uporządkowaniu dochodzi się do równania o postaci

$$u(I_1) - u(I'_1) = R(I'_1 - I_1 - 2I_0). \quad (4)$$

Pierwsze i oczywiste rozwiązanie otrzymuje się dla $I_1 = I'_1 = I$ (gdyż wtedy $I_0 = 0$) co odpowiada pełnej symetrii układu. Symetria jednak wystąpi tylko wtedy, gdy podane wyżej wartości są jedynym rozwiązaniem równania (4). Zależy to — podobnie jak w poprzednim układzie — od kształtu charakterystyki elementu nieliniowego.



Rys. 4. Obwód symetryczny o elementach nieliniowych w gałęziach przyległych.



Rys. 5. Trigger lampowy jako obwód symetryczny.

Jeżeli charakterystyka ta wyraża się funkcją monotoniczną rosnącą, to dla $I_1 > I'_1$ jest $u(I_1) > u(I'_1)$ oraz (co wynika z rozptyłu prądów) $I_0 > 0$. W tym przypadku prawa strona równania (4) ma wartość dodatnią, lewa zaś ujemną, z czego wynika, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest $I_1 = I'_1$, czyli stan elektrycznej symetrii układu.

Zupełnie podobnie jak dla poprzednio omówionego układu można także udowodnić, że przy opadającej charakterystyce elementów nieliniowych mogą istnieć rozwiązania $I_1 \neq I'_1$, czyli układ może mieć niesymetryczny rozptył prądów.

Podaną powyżej metodą można sprawdzić np. warunki symetrii triggera lampowego (rys. 5), zawierającego dwie lampy w układach wzmacniaczy oporowych ze sprzężeniami zwrotnymi przez oporowe dzielniki napięcia $R_1 R_2$ z anody każdej lampy na siatkę lampy przeciwległej.

Zakładamy charakterystykę lampy w postaci dowolnej funkcji

$$i_a = f(u_s, u_a)$$

następnie zaś przyjmujemy dla uproszczenia, że prąd płynący przez dzielniki napięcia $R_1 R_2$ jest znacznie mniejszy od prądu lampy, wobec czego może być pominięty w obliczeniach.

Przy takich założeniach można układ opisać wzorami:

$$u_{a1} + R_a \cdot i_{a1}(u_{s1}, u_{a1}) = u_{a2} + R_a \cdot i_{a2}(u_{s2}, u_{a2}) \quad (5)$$

$$u_{s1} = U_{s0} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{a2} = U_{s0} + q \cdot u_{a2} \quad (6a)$$

$$u_{s2} = U_{s0} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{a1} = U_{s0} + q \cdot u_{a1}. \quad (6b)$$

Porządkując równanie (5) otrzymujemy po podstawieniu do niego wzorów (6) wyrażenie

$$u_{a2} - u_{a1} = R_a [i_{a1}(u_{a1}, q \cdot u_{a2}) - i_{a2}(u_{a2}, q \cdot u_{a1})]. \quad (7)$$

Pomijając zależność prądu lamp od ich napięcia anodowego, co jest całkowicie uzasadnione dla lamp o dużym współczynniku amplifikacji, otrzymujemy

$$u_{a2} - u_{a1} = R_a [i_{a1}(q \cdot u_{a2}) - i_{a2}(q \cdot u_{a1})]. \quad (8)$$

Równanie to ma postać podobną do (2), różni się tylko kolejnością wyrazów po jednej stronie równania. Wynika stąd, w myśl podobnego jak poprzednio rozumowania, że brak symetrii elektrycznej układu może tu wystąpić, jeżeli funkcja $i_a(u_s, u_a)$ jest monotoniczna rosnąca, co normalnie jest spełnione. Lampa działa tu więc jak element o ujemnym nachyleniu charakterystyki dzięki działaniu dodatniego sprzężenia zwrotnego z obwodu anodowego przeciwległej lampy.

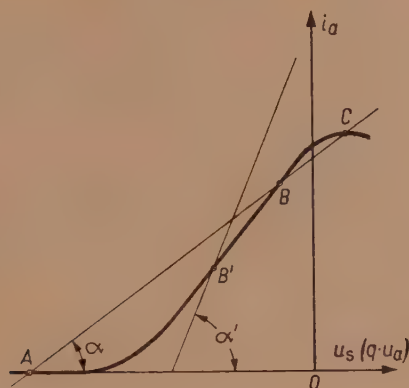
Warunkiem istnienia rozwiązywania równania (8) różnego od stanu symetrii jest możliwość znalezienia pary różnych wartości i_{a1}, i_{a2} spełniających równanie (8). Można to uzyskać np. metodą graficzną na charakterystyce lampy w układzie i_a, u_s (rys. 6), przy czym na osi poziomej można również wpisać wartości napięcia anodowego przeciwległej lampy, zgodnie z wzorami (6). Jeżeli na tym samym wykresie narysujemy prostą o nachyleniu względem osi poziomej

$$a = \arctg \frac{1}{q \cdot R_a} = \arctg \frac{R_1 + R_2}{R_2 \cdot R_a}$$

to — jak łatwo uzasadnić — punkty przecięcia tej prostej z charakterystyką lampy dają szukane wartości spełniające równanie (8).

Z rys. 6 widać, że przy dużym nachyleniu prostej (czyli przy małej wartości iloczynu $q \cdot R_a$) występuje tylko jeden punkt przecięcia, tzn. w układzie zachowana jest symetria elektryczna; taki stan układu nie daje możliwości powstania pracy bistabilnej, układ nie może wtedy pracować jako trigger. Przy małym nachyleniu tej prostej (czyli przy dużej wartości iloczynu $q \cdot R_a$) występują trzy punkty przecięcia z charakterystyką lampy, co świadczy o nie zachowaniu warunku symetrii elektrycznej. Określenie stabilności otrzymanych punktów pracy dowolną metodą pozwala wyznaczyć możliwe ustalone stany pracy układu. Warunki otrzymane w tym przypadku odpowiadają pracy układu bistabilnego, a więc triggera. Graficzny przypadek powstaje przy styczności prostej oporności do prostoliniowego odcinka charakterystyki, co prowadzi do znanego warunku

$$q \cdot \frac{K_a}{1 + \varrho_a/R_a} = 1.$$



Rys. 6. Graficzne wyznaczanie możliwych stanów pracy triggera lampowego: punkty A, B, C — trzy możliwe punkty pracy, B' — jedyny możliwy punkt pracy.

Podobną analizę można przeprowadzić dla innych układów symetrycznych z dwoma elementami nieliniowymi, np. dla triggera tranzystorowego.

4. WNIOSKI

Zastosowana metoda pozwala na łatwe stwierdzenie warunków elektrycznej symetrii układów symetrycznych o dwóch dowolnych elementach nieliniowych. Warunek symetrii może w pewnych przypadkach zastąpić kryterium stabilności układu, gdyż stan pracy symetrycznej jest jedynym możliwym stanem pracy układu.

Katedra Elektroniki Przemysłowej
Politechniki Śląskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Drobów S. A.: K woprosu o skaczkach w elektryczeskich cepiach. Radiotekhnika, t. 15, Nr 7, ss. 29—36, 1960.
2. Macura A.: Statyczna analiza układu bistabilnego. Arch. Automatyki i Telemechaniki, t. 2, Nr 1—2, ss. 139—150, 1957.
3. Milsztein W. N.: K rasczetu mostow. Elektrizestwo, r. 1941, Nr 4.
4. Nagengast E.: Spannungsstabilisierung mit Varistoren unter Verwendung der Brückenschaltung. Elektronik r. 1956, Nr 1, ss. 19—22.
5. Patchett G. N.: The theory of non-linear bridge circuit as applied to voltage stabilizers. Journ. Inst. El. Eng. Part. III, t. 93, Nr 26, ss. 16—22, 1946.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ СИММЕТРИЧНО ПОСТРОЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Многие электрические цепи могут быть представлены в симметрической форме в простейшем случае в виде моста рис. 1 с попарно равными элементами. Может быть получена система симметрическая по отношению к центру (рис. 1а), в которой противоположенные плечи моста равны себе, или симметрическая по отношению к вертикальной оси (рис. 1б), в которой равны себе элементы соприкасающихся плечей моста.

Если все элементы такой системы линейны, то в ней происходит симметрическое распределение тока и напряжения, т.е. токи и напряжения в попарно одинаковых элементах — одинаковы. Если же одна из пар элементов имеет нелинейные свойства, то нельзя заранее предполагать симметрии распределения токов, так как известны нелинейные системы, в которых распределение токов несимметрично.

Симметрические цепи применяются часто в качестве схем для стабилизации тока или напряжения, симметрические усилители, триггеры и т.п. при чем в качестве нелинейных элементов применяются лампы накаливания, термисторы, электронные лампы и прочие. Анализ таких схем может быть значительно упрощен при предположении электрической симметрии. Такое предположение принимается впрочем рядом авторов ([3], [4], [5]).

Целью настоящей работы является нахождение критерия действительного существования полной электрической симметрии в симметрично построенных электрических цепях.

Для системы симметрической по отношению к центру (рис. 2) можно составить уравнение, общий вид которого

$$u(I_1) - u(I'_1) = R(I_1 - I'_1). \quad (1)$$

Это уравнение несомненно решается для $I_1 = I'_1 = I$, что соответствует электрической симметрии системы. Однако существование такого решения не является доказательством того, что система симметрична, так как могут существовать другие численные значения пар I_1, I'_1 удовлетворяющие этому равенству и в этом случае возможна также несимметричность системы.

Условия существования полной симметрии системы можно определить для следующих случаев:

а) Если характеристика нелинейного элемента $u(I)$ является монотонической растущей функцией, то для $I_1 > I'_1 - u(I_1) > u(I'_1)$. В этом случае левая сторона уравнения (1) положительна, правая — отрицательна, вследствие чего уравнение не может иметь решений для $I_1 \neq I'_1$. Из этого вытекает, что для такого случая всегда налична симметрия распределения тока и она является единственным возможным режимом работы системы. Это явление имеет место всегда при использовании таких элементов как лампы накаливания, термисторы и др.

б) Если характеристика нелинейного элемента содержит нисходящий отрезок (отрицательное сопротивление), то для $I_1 > I'_1 - u(I_1) < u(I'_1)$. В этом случае обе стороны уравнения (1) имеют одинаковый знак и могут существовать пары значений I_1, I'_1 удовлетворяющие этому равенству, а отличные от $I_1 = I'_1$. Нахождение этих значений можно произвести например графически (рис. 3). Они будут определены координатами точек пересечения прямой сопротивления R с характеристикой нелинейного элемента, очевидно удовлетворяющими уравнению (1). Если имеется только одна такая точка пересечения, то возможен

только один режим работы соответствующий электрической симметрии системы. При нескольких точках пересечения возможно в принципе несимметрическое распределение токов, которое следует проверить одним из известных методов.

Для систем симметричных по отношению к оси (рис. 4) получается равенство:

$$u(I_1) - u(I'_1) = R(I'_1 - I_1 - 2I_0). \quad (2)$$

Аналогично как для предыдущей системы доказывается, что для нелинейных элементов имеющих характеристики являющиеся монотонической восходящей функцией возможно только симметрическое распределение тока. Для нисходящих характеристик возможны симметрическое и асимметрическое распределение тока в зависимости от взаимного положения прямой сопротивления и характеристики нелинейного элемента.

По этому же методу можно проверить условия работы лампового триггера (рис. 5) анализа работы которого ведет к получению упрощенного уравнения.

$$u_{a2} - u_{a1} = R_a [i_{a1}(u_{a2}) - i_{a2}(u_{a1})] \quad (3)$$

Это уравнение имеет такую же структуру, как (1) отличаясь от него только порядком выражении по одной стороне знака равенства. Из этого вытекает что асимметрия может тут возникнуть если нелинейный элемент имеет характеристику выраженную восходящей монотонической функцией. Это условие исполнено для каждой усилительной электронной лампы, таким образом можно получить возможность несимметрической работы свойственной для схемы триггера. Вызвано это конечно положительной обратной связью аноды одной электронной лампы с сеткой другой. Пользуясь графическим методом можно и в этом случае определить условия существования одной или нескольких точек пересечения прямой сопротивления с характеристикой лампы (рис. 6), что соответствует симметрии или асимметрии системы. Стабильность полученных решений следует проверить одним из известных методов.

ELECTRIC SYMMETRY OF NON-LINEAR CIRCUITS WITH SYMMETRICAL STRUCTURE

Many electrical circuits can be represented as symmetrical circuit, in the simplest case in form of a bridge (Fig. 1.) containing a certain number of pairs of identical elements. This may be a network symmetrical with regard to the central point (Fig. 1a), in which opposite elements are identical in pairs, or a network symmetrical with regard to the vertical axis (Fig. 1b), in which adjacent elements of the bridge are identical in pairs.

If all elements of such network are linear, current flow and voltage distribution in this network will be symmetrical and consequently current and voltage values will be equal in pairs of corresponding elements. If, however, one pair of elements in the network has non-linear properties, one can not assume a symmetrical current flow, because there are known non-linear networks with asymmetrical current flow.

Symmetrical circuits are often applied as voltage or current stabilizers, symmetrical amplifiers, triggers etc., and in these networks non-linear elements are represented by incandescent lamps, thermistors, electron tubes etc. The analysis

of such networks can be considerably simplified by anticipating their electrical symmetry, this method being adopted by many authors [3], [4], [5]. Establishment of the criterion of full symmetry existence in circuits with symmetrical structure is the aim of this paper.

For a circuit symmetrical with regard to the central point (Fig. 2) one can set down the following general equation

$$u(I_1) - u(I'_1) = R(I' - I). \quad (1)$$

Evidently, this equation is valid for $I_1 = I'_1 = I$, which corresponds to the electric symmetry of the network. Such a solution can not be accepted as a proof of symmetry of the network, because there may exist some other pairs of values for I_1 and I'_1 satisfying the said equation, in which case the state of asymmetry of the network is possible.

The full symmetry conditions of a network can be determined for the following cases:

a. If the $u(I)$ characteristic of the non-linear element is a monotonically growing function, then for $I_1 > I'_1$ will be $u(I_1) > u(I'_1)$. In this case the left side of the equation (1) is positive, whereas the right side is negative, hence this equation can not be fulfilled for $I_1 \neq I'_1$. Consequently, in this case the current flow is always symmetrical, and this is the only possible working condition of the network. This occurs as a rule when using such non-linear elements as incandescent lamps, thermistors, electron tubes etc.

b. If the $u(I)$ characteristic of the non-linear element has a decreasing section (negative resistance), then for $I_1 > I'_1$ will be $u(I_1) < u(I'_1)$ and consequently both sides of the equation (1) will be of the same sign, and there may exist some pairs of values of I_1, I'_1 different from $I_1 = I'_1$ and fulfilling the said equation. These values can be determined e.g. graphically (Fig. 3) as co-ordinates of the intersection points of resistance R line and characteristic $u(I)$ of the non-linear elements. It is easy to confirm that these values fulfill the equation (1). In case of one intersection point of the resistance R line with the $u(I)$ characteristic of the non-linear element there exists only one working state corresponding to the electric symmetry of the network. At several points of intersection there is possible in principle asymmetrical current flow, stability of which can be checked by one of generally known methods.

For networks symmetrical with regard to the axis (Fig. 4) the following equation is obtained:

$$u(I_1) - u(I'_1) = R(I'_1 - I_1 - 2I_0) \quad (2)$$

Similarly as for the previous network one can prove, that for non-linear elements having a monotonically growing characteristic there is possible a symmetrical current flow only. For decreasing characteristics it may exist a state of symmetry or asymmetry, depending on the slope of the resistance R line and the shape of the non-linear element characteristic.

The same method is suitable for checking the working conditions of the valve trigger (Fig. 5), analysis of which leads to a simplified equation

$$u_{a2} - u_{a1} = R_a [i_{a1}(u_{a2}) - i_{a2}(u_{a1})]. \quad (3)$$

This equation is of the same form as equation (1) except the sequence of components at one side. In consequence the asymmetry of the network is possible when the non-linear element characteristic is a monotonically growing function.

This condition is fulfilled for any amplifying valve, hence a possibility of asymmetrical performance specific for trigger circuit is here attained, evidently because of the positive feedback from the plate of one valve to the grid of the other one. A graphic method can be applied for determination the existence of one or several points of intersection of the resistance R line and the valve characteristic (Fig. 6), which corresponds to the symmetry or asymmetry state of the network. Stability of the solutions thus obtained should be checked by one of generally known methods.

621.391

J. KULIKOWSKI

O pewnym uogólnieniu kryterium „idealnego obserwatora”

Rękopis dostarczono 8. 7. 1960.

W artykule omawia się pewien nowy typ kryterium optymalnego odbioru sygnałów progowych, mogący mieć zastosowanie w przypadku nieokreślonych własności statystycznych parametrów rozkładu sygnału i zakłócenia.

W statystycznej teorii odbioru sygnałów radiolokacyjnych szeroko stosuje się tzw. kryterium „idealnego obserwatora” Siegerta [3], polegające na żądaniu minimalizacji błędu detekcji:

$$P = P_{f.a.} + P_{b.a.} = p_0 \int_{\Omega_1} w(y|0) dy + p_1 \int_{\Omega_0} w(y|1) dy = \min_{(\Omega_0/\Omega_1)} \quad (1)$$

gdzie:

$P_{f.a.}$ — prawdopodobieństwo tzw. „fałszywego alarmu”;

$P_{b.a.}$ — prawdopodobieństwo „braku alarmu”;

p_0 — prawdopodobieństwo a priori braku sygnału;

$p_1 = 1 - p_0$ — prawdopodobieństwo a priori obecności sygnału;

Ω_0 i Ω_1 — są to odpowiednio obszary decyzji „brak sygnału” i „sygnał”, wzajemnie dopełniające się w przestrzeni Ω sygnałów odbieranych y ; $w(y|0)$ i $w(y|1)$ oznaczają warunkowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa sygnału odbieranego y , odpowiednio przy braku i przy obecności sygnału.

Możliwość stosowania kryterium opartego o minimalizację wyrażenia typu (1) zachodzi tylko wtedy, gdy obie funkcje $w(y|0)$ i $w(y|1)$ określone są analitycznie. Zastrzeżenie to obejmuje również przypadek funkcji gęstości prawdopodobieństwa sygnału odbieranego y w $(y, \varepsilon|0)$ i $w(y, \varepsilon|1)$, zależnych od pewnego parametru ε określonego statystycznie, gdyż wtedy przez funkcje $w(y|0)$ i $w(y|1)$ rozumieć można funkcje gęstości, uśrednione statystycznie względem tego parametru:

$$w(y|0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y, \varepsilon|0) d\varepsilon, \quad w(y|1) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y, \varepsilon|1) d\varepsilon. \quad (2)$$

W praktyce spotykamy się często z przypadkiem warunkowych funkcji gęstości $w(y|0; \varepsilon)$ i $w(y|1; \varepsilon)$, zależnych od nieznanego parametru ε , dla którego nie znamy również funkcji gęstości prawdopodobieństwa $w(\varepsilon)$, a więc operacja statystycznego uśrednienia (2) jest niewykonalna. W tym przypadku zalecane jest zwykle stosowanie kryterium „minimaks”, tj. wybór takiego podziału przestrzeni sygnałowej Ω na dopierające się obszary Ω_0 i Ω_1 aby osiągnąć

$$Q = \inf_{(\Omega_0/\Omega_1)} \sup_{(\varepsilon)} P(\varepsilon; \Omega_0/\Omega_1). \quad (1)$$

Kryterium „minimaks” w praktyce prowadzi często do niezadowolających (a niekiedy do wręcz trywialnych) rozwiązań problemu detekcji optymalnej co związane jest z tym, że nie uwzględnia ono informacji początkowej dotyczącej wartości parametru ε , która niekiedy może mieć postać „intuicyjnych” (tj. niekoniecznie ściśle analitycznych lub statystycznych) przewidywań. Dlatego też przez niektórych autorów czynione były próby stworzenia kryteriów pośrednich, uwzględniających w jakimś stopniu informację dotyczącą nieznanego parametru rozkładu.

Przykładem takiej propozycji jest kryterium Hodges'a - Lehmana [1].

$$Q_1 = \varrho P + (1 - \varrho) Q = \min_{(\Omega_0/\Omega_1)}, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \quad (2)$$

gdzie P i Q określone są odpowiednio przez (1) i (3) a ϱ jest pewnym parametrem związanych z posiadaną a priori informacją o własnościach statystycznych nieznanego parametru rozkładu ε .

W zastosowaniu do teorii optymalnego odbioru kryterium Lehmana okazuje się zbyt uciążliwe, gdyż brak metody rozwiązania odpowiedniego problemu wariacyjnego w formie dogodnej dla praktycznych obliczeń.

W związku z tym niżej podano inną propozycję kryterium pośredniego, prowadzącego do prostego i fizycznie zrozumiałego rozwiązania problemu optymalizacji.

Założmy, że funkcje gęstości $w(y|0; \varepsilon)$, $w(y|1; \varepsilon)$ zależą od pewnego parametru $\varepsilon \in E$, którego ścisła wartość nie jest znana a priori i nie może być określona statystycznie, tj. nie jest znany rozkład prawdopodobieństwa tego parametru. Założmy, że można wyznaczyć pewien zbiór $D_0 = (\varepsilon_0 - \Delta_1, \varepsilon_0 + \Delta_2)$ przybliżonych wartości nieznanego parametru ε . Założmy dalej, że funkcje $w(y|0; \varepsilon)$ i $w(y|1; \varepsilon)$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe względem składowych wektora ε w otoczeniu D_0 punktu ε_0 .

Przyjmując początkowo wartość parametru $\varepsilon = \varepsilon_0$ jako ścisłą, możemy określić optymalną metodę odbioru, minimalizującą wielkość P' , określoną wzorem

$$P' = p_0 \int_{\Omega_1} w(y|0; \varepsilon_0) dy + p_1 \int_{\Omega_0} w(y|1; \varepsilon_0) dy. \quad (3)$$

Jeżeli w wyniku niedokładnego określenia parametru jego rzeczywista wartość równa jest ε , to rzeczywisty błąd detekcji P'' przyjmuje wartość

$$P'' = p_0 \int_{\Omega_1} w(y|0; \varepsilon) dy + p_1 \int_{\Omega_0} w(y|1; \varepsilon) dy \geq P'. \quad (6)$$

Liniowa część przyrostu prawdopodobieństwa błędu detekcji wynosi zatem

$$\begin{aligned} \Delta P &\cong P'' - P' \cong (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{d}{d\varepsilon} P''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \\ &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \left\{ p_0 \int_{\Omega_1} \frac{d}{d\varepsilon} w(y|0; \varepsilon) dy + p_1 \int_{\Omega_0} \frac{d}{d\varepsilon} w(y|1; \varepsilon) dy \right\}_{\varepsilon=\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

przy czym zakładamy dopuszczalność odwracalności kolejności całkowania i różniczkowania.

Dla oceny przyrostu prawdopodobieństwa błędu ΔP w wyrażeniu (7) przyjmiemy punkt widzenia „minimaks” tj. założymy, że przy każdej realizacji sygnału odbieranego błąd oceny parametru ε działa w kierunku zwiększenia ogólnego prawdopodobieństwa błędnej detekcji P . Z (7) otrzymamy

$$\Delta P_{\max} = |\varepsilon - \varepsilon_0| \left\{ p_0 \int_{\Omega_1} \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(y|0; \varepsilon) \right| dy + p_1 \int_{\Omega_0} \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(y|1; \varepsilon) \right| dy \right\}_{\varepsilon=\varepsilon_0}, \quad (8)$$

gdzie zakładamy istnienie odpowiednich całek bezwzględnych. Utwórzmy teraz wyrażenie

$$Q_2 = P' + \Delta P_{\max}, \quad (9)$$

które rozważać będziemy jako funkcjonal podziału obszaru Ω na dwa wzajemnie dopełniające się w Ω podobszary Ω_0 i Ω_1 .

Za optymalną metodę odbioru uważać będziemy taką metodę, która odpowiada optymalnemu podziałowi Ω_0/Ω_1 w sensie minimum wyrażenia (9).

Przepiszmy wyrażenie (9) w nowej postaci jako

$$\begin{aligned} Q_2 &= p_0 \left\{ \int_{\Omega_1} w(y|0; \varepsilon_0) dy + \lambda \int_{\Omega_0} \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(y|0; \varepsilon) \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} dy \right\} + \\ &+ p_1 \left\{ \int_{\Omega_0} w(y|1; \varepsilon_0) dy + \lambda \int_{\Omega_1} \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(y|1; \varepsilon) \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} dy \right\} = \\ &= p_0 \int_{\Omega_1} \left[w(y|0; \varepsilon) + \lambda \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(y|0; \varepsilon) \right| \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} dy + \\ &+ p_1 \int_{\Omega_0} \left[w(y|1; \varepsilon) + \lambda \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(y|1; \varepsilon) \right| \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} dy, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie λ jest liczbą stałą dodatnią, określoną jako $\lambda = \min(\Delta_1, \Delta_2)$. Zauważmy, że przy powyższych założeniach oba wyrażenia podcałkowe są funkcjami wszędzie dodatnimi swoich argumentów.

W celu określenia optymalnego podziału Ω_0/Ω_1 postąpimy podobnie jak w wypadku kryterium „idealnego obserwatora”. Wydzielmy mianowicie element obszaru Ω , określony współrzędnymi $(\bar{y}, \bar{y} + dy)$. Element ten można zaliczyć bądź do obszaru Ω_0 bądź do Ω_1 . W pierwszym wypadku przyrost sumarycznej wartości Q_2 wyniesie

$$p_1 \left[w(\bar{y}|1; \varepsilon) + \lambda \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(\bar{y}|1; \varepsilon) \right| \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} dy, \quad (11a)$$

podczas gdy w drugim odpowiednio

$$p_0 \left[w(\bar{y}|0; \varepsilon) + \lambda \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(\bar{y}|0; \varepsilon) \right| \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} dy. \quad (11b)$$

Oznaczmy

$$W_0(\bar{y}; \varepsilon_0) = p_0 \left[w(\bar{y}|0; \varepsilon) + \lambda \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(\bar{y}|0; \varepsilon) \right| \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0}, \quad (12a)$$

$$W_1(\bar{y}; \varepsilon_0) = p_1 \left[w(\bar{y}|1; \varepsilon) + \lambda \left| \frac{d}{d\varepsilon} w(\bar{y}|1; \varepsilon) \right| \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (12b)$$

Wówczas dla minimalizacji wyrażenia (10) przyjąć należy następującą zasadę podziału Ω_0/Ω_1 :

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \Omega_0 & \quad \text{gdy} \quad W_0(\bar{y}; \varepsilon_0) > W_1(\bar{y}; \varepsilon_0), \\ \bar{y} \in \Omega_1 & \quad \text{gdy} \quad W_1(\bar{y}; \varepsilon_0) > W_0(\bar{y}; \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Zauważmy jednak, że dla każdego ustalonego parametru λ funkcje $W_0(\bar{y}; \varepsilon_0)$ i $W_1(\bar{y}; \varepsilon_0)$ mogą być interpretowane jako:

$$W_0(\bar{y}; \varepsilon_0) = p_0 \tilde{w}(\bar{y}|0; \varepsilon_1), \quad (14a)$$

$$W_1(\bar{y}; \varepsilon_0) = p_1 \tilde{w}(\bar{y}|1; \varepsilon_1), \quad (14b)$$

gdzie

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \lambda \cdot \text{sign} \left[\frac{d}{d\varepsilon} P''(\varepsilon) \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} \quad (15)$$

a $\tilde{w}(\bar{y}|0; \varepsilon_1)$ i $\tilde{w}(\bar{y}|1; \varepsilon_1)$ oznaczają liniowe przybliżenia funkcji $w(\bar{y}|0; \varepsilon)$ i $w(\bar{y}|1; \varepsilon)$ w „najbardziej lokalnie niekorzystnym” punkcie $\varepsilon = \varepsilon_1$. Zatem optymalna zasada odbioru w sensie minimum wyrażenia Q_2 może być zrealizowana jako zasada optymalnego odbioru w sensie kryterium „idealnego obserwatora” przy założonych „bardziej pesymistycznych” wartościach nieznanymi parametrów ε . Oczywiście, zasada ta stanowi rodzaj zasady pośredniej między zasadą minimum średniego „ryzyka” określonego wyrażeniem (5) a zasadą „minimaks”, przy czym uwzględnia ona możliwość wykorzystania pewnej informacji odnośnie parametru ε

predystynującej wartość $\varepsilon = \varepsilon_0$ jako najbardziej „możliwą”, choć z bliżej nieokreślonym prawdopodobieństwem. Zaznaczamy, że uogólnienie powyższego kryterium na wypadek n -wymiarowego parametru nie nastrocza większych trudności.

WYKAZ LITERATURY

1. Hodges J. L., Lehman E. L.: *The use of previous experience in reaching statistical decisions*. Ann. Math. Stat. vol. 23, Nr 3, 1952.
2. Kulikowski J.: *Woprosy optimalnogo obnarużenia i selekcji celej*. Dyser-tacja kandydacka. Moskwa, 1959.
3. Lawson, Uhlenbeck: *Threshold signals*. MIT lab. ser. vol. 19.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КРИТЕРИЯ
„ИДЕАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ”

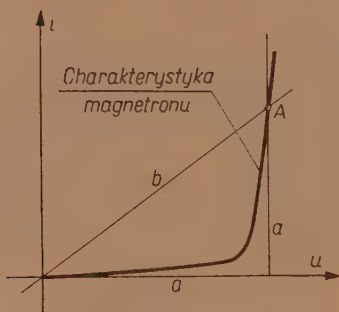
В статье рассматривается новый тип критерия оптимальности бинарных статистических решений. Этот критерий может применяться в случае, если функции плотности вероятности сигнала и помехи заданы с точностью до некоторого числа постоянных параметров, функции распределения вероятности которых неизвестны, но область в которой содержатся значения этих параметров может быть определена с некоторым приближением. Критерий требует одновременной минимизации вероятности детекционной ошибки и максимальной линейной части приращения этой вероятности, вызванного неточностью априорного определения неизвестных параметров.

ON SOME EXTENSION
OF THE „IDEAL OBSERVER” CRITERION

The article deals with a new type of the optimality criterion of binary statistical decisions. This criterion can be applied in case when probability density functions for signal and distortion are known with accuracy limited to a certain number of constant parameters, for which distributions of probabilities are not known, but it is possible to determine approximately the area covering values of the parameters. The criterion is based on the probability minimization of detection errors simultaneously with a maximum linear part of the implement of this probability, caused by inaccurate assumption of unknown parameters.



Charakterystyka magnetronu $i = f(u)$ ma kształt przedstawiony na rys. 2, a więc jest to element w dużym stopniu nieliniowy. Jednakże stosowane dotychczas metody syntezy układów formujących polegają na założeniu, że obciążenie jest opornością liniową [1], [2]. Ponieważ zazwyczaj pożądane impulsy mają poziomy wierzch, charakterystykę magnetronu zastępuje się przez prostą oznaczoną na rys. 2 literą b , przy czym punkt A określający nachylenie tej prostej jest punktem pracy dla wierzchu impulsu. Jest rzeczą oczywistą, że metody te są mało dokładne, co występuje ze szczególną ostrością, gdy czasy nara-



Rys. 2.

stania i opadania impulsu są znaczne. Poza tym metody te nie nadają się do użycia w przypadku impulsu nie mającego płaskiego wierzchołka.

W pracy niniejszej rozpatrzono inną metodę aproksymacji charakterystyki magnetronu, a mianowicie aproksymację za pomocą łamanej oznaczonej na rys. 2 literą a . Ta proponowana aproksymacja uniemożliwia wprawdzie bezpośrednio posłużenie się znanymi metodami syntezy czwórników reaktancyjnych o obciążeniu omowym; nie mniej jednak przy znacznie wierniejszym, jak to widać z rys. 2, odtworzeniu charakterystyki magnetronu, pozwala na znacznie dokładniejsze określenie błędu, uproszczenie układu i rozszerzenie klasy realizowanych kształtów impulsów w stosunku do układów o obciążeniu liniowym.

2. ZAŁOŻENIA

Proponowana metoda syntezy czwórników formujących opiera się na następujących założeniach.

- I. Obciążenie ma charakterystykę oznaczoną na rys. 2 literą a .
- II. Impuls prądu, który ma być uformowany przez czwórnik ma następujące własności:

- a) w przedziale $0 < t < \tau$ przybiera tylko wartości dodatnie i skończone,

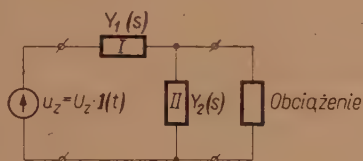
- b) dla pozostałych wartości czasu ma wartość równą zero,
 c) ma skończoną liczbę nieciągłości i ekstremów

III. Impuls napięcia na obciążeniu ma niezależnie od kształtu impulsu prądu, kształt prostokąta tj.

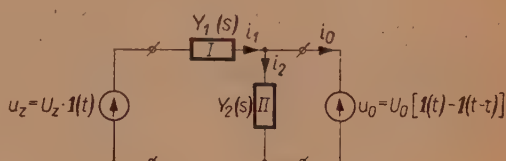
$$u_0(t) = U_0 \quad \text{dla} \quad 0 < t < \tau$$

$$u_0(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \leq 0 \quad \text{i} \quad t \geq \tau$$

IV. Czwórnik formujący może się składać tylko z elementów liniowych, przy czym ma mieć taką strukturę, by dały się one wydzielić w postaci dwu dwójników: szeregowego I i równoległego II, jak to przedstawiono na rys. 3. Czwórnik ten początkowo nie może zawierać żadnej energii.



Rys. 3.



Rys. 4.

3 OKREŚLENIE ADMITANCJI $Y_1(s)$ i $Y_2(s)$

Z zasady kompensacji wynika, że jeśli generowany impuls spełnia wy-szczególnione wyżej założenia, to przebiegi w układzie przedstawionym na rys. 3 nie ulegną zmianie, jeśli obciążenie zastąpione zostanie siłą elektromotoryczną o kształcie identycznym z napięciem na obciążeniu, zatem ten nieliniowy układ jest równoważny układowi liniowemu przed-stawionemu na rys. 4.

Prąd i_0 w układzie przedstawionym na rys. 4 określa wyrażenie

$$I_0(s) = \frac{U_z}{s} Y_1(s) - \frac{U_0}{s} (1 - e^{-s\tau})(Y_1(s) + Y_2(s)). \quad (1)$$

Z drugiej strony transformatę Laplace'a tego prądu $I_0(s)$ przedstawić można następująco. Przyjmijmy, że pożądany impuls prądu ma np. kształt przedstawiony na rys. 5a. Rozważmy periodyczny przebieg $i_p(t)$ przed-stawiony na rys. 5b, a utworzony w ten sposób, że w przedziale $0 \leq t \leq \tau$

$$i_p(t) = i_0(t)$$

w przedziale zaś $-\tau \leq t \leq 0$

$$i_p(-t) = -i_0(t)$$

a poza tym spełniający zależność

$$i_p(t) = i_p(t \mp 2N\tau)$$

gdzie N jest liczbą całkowitą. Przebieg ten można rozłożyć na szereg Fouriera wg wzoru

$$i_p(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \quad (2)$$

gdzie

$$a_{\nu} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} i_0(t) \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \cdot dt \quad (3)$$

i przedstawić również w postaci

$$i_p(t) = i'_p(t) + i''_p(t)$$

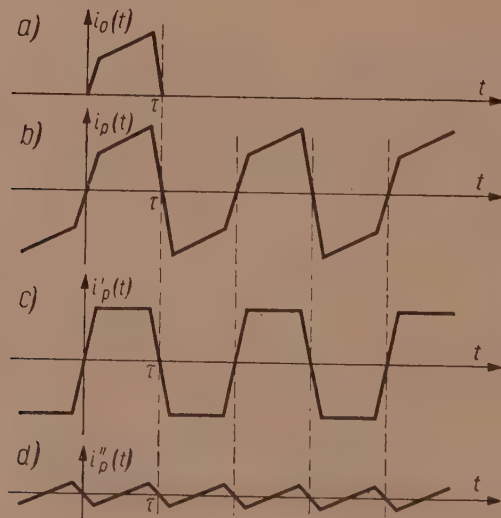
gdzie

$$i'_p(t) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t$$

jest sumą nieparzystych harmoniczných przebiegu $i_p(t)$, oraz

$$i''_p(t) = \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t$$

sumą parzystych harmoniczných przebiegu $i_p(t)$.



Rys. 5.

Łatwo zauważyć (por. rys. 5), że pożądany impuls prądu przez obciążenie można przedstawić w postaci

$$i_0(t) = [1(t) \cdot i'_p(t) + 1(t-\tau) i'_p(t-\tau)] + [1(t) \cdot i''_p(t) - 1(t-\tau) i''_p(t-\tau)],$$

a jego transformatę Laplace'a jako

$$I_0(s) = (1 + e^{-s\tau}) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a_\nu \nu \frac{\pi}{\tau}}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} + (1 - e^{-s\tau}) \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{a_\nu \nu \frac{\pi}{\tau}}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (4)$$

Założmy na początek, że do wiernego odtworzenia przebiegu $i_p(t)$ wystarczy suma n harmoniczných. W przypadku tym wzór (4) przybiera postać

$$I_0(s) = (1 + e^{-s\tau}) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n \frac{a_\nu \nu \frac{\pi}{\tau}}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} + (1 - e^{-s\tau}) \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^n \frac{a_\nu \nu \frac{\pi}{\tau}}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (5)$$

Porównując ze sobą wyrażenia (1) i (5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{U_z}{s} Y_1(s) - \frac{U_0}{s} (1 - e^{-s\tau}) (Y_1(s) + Y_2(s)) = \\ & = (1 + e^{-s\tau}) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n \frac{a_\nu \nu \frac{\pi}{\tau}}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} + (1 - e^{-s\tau}) \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^n \frac{a_\nu \nu \frac{\pi}{\tau}}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Ze względu na możliwość realizacji admitancji $Y_1(s)$ i $Y(s)$ z możliwych rozwiązań powyższego równania przestępnego interesujące są tylko rozwiązania wiernie. Można łatwo wykazać, że istnieje jedno tylko takie rozwiązanie i że ma ono postać

$$Y_1(s) = \frac{2\pi}{\tau U_z} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n \frac{\nu a_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (7a)$$

$$Y_2(s) = \frac{\pi}{\tau} \left(\frac{1}{U_0} - \frac{2}{U_z} \right) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n \frac{\nu a_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} - \frac{\pi}{\tau U_0} \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^n \frac{\nu a_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (7b)$$

przy czym admitancje $Y_1(s)$ i $Y_2(s)$ są fizycznie realizowalne, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$U_z \geq 2U_0,$$

$$a_\nu \geq 0 \quad \text{przy } \nu \text{ nieparzystym,}$$

$$a_\nu \leq 0 \quad \text{przy } \nu \text{ parzystym.}$$

Bieguny admitancji $Y_1(s)$ i $Y_2(s)$ określonych wzorami (7) leżą na osi urojonej, a więc poszukiwany czwórnik zawiera wyłącznie elementy reaktancyjne.

Z wyrażeń (7) wynika również, że minimalne napięcie zasilania, jakie może być użyte do formowania impulsu, określa wzór

$$U_z = 2U_0 \quad (8)$$

w którym to przypadku wyrażenia te przybierają postać

$$Y_1(s) = \frac{\pi}{\tau U_0} \sum_{\nu=1,2,3,\dots}^n \frac{\nu a_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (9a)$$

$$Y_2(s) = -\frac{\pi}{\tau U_0} \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^n \frac{\nu a_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (9b)$$

4. WŁASNOŚCI OTRZYMANEGO ROZWIĄZANIA

Z praktycznego punktu widzenia wartościowe są jedynie rozwiązania (9) otrzymane przy spełnieniu warunku (8). Praca z minimalnym napięciem zasilania jest bowiem korzystna zarówno ze względu na konstrukcję zasilacza i wytrzymałość napięciową elementów czwornika formującego, jak i na następujące dodatkowe własności:

- Liczba elementów czwornika formującego staje się wtedy minimalna
- Energia pobrana z zasilacza w czasie trwania impulsu jest minimalna
- Po uformowaniu impulsu prąd płynący przez gałąź zasilacza jest równy zero (ma to podstawowe znaczenie w przypadkach zastosowania omawianego czwornika w układach umożliwiających generację impulsów powtarzających się, co z reguły występuje w praktyce)

Wykazanie powyższych własności układu nie nastręcza trudności.

Własność pierwsza wynika natychmiast z porównania wyrażeń (9b) i (7b). W przypadku spełnienia warunku (8) liczba biegunów admitancji $Y_2(s)$ zmniejsza się o liczbę biegunów jakie zawiera admitancja $Y_1(s)$.

Dla wykazania drugiej i trzeciej własności rozpatrzmy przebieg czasowy prądu w gałęzi szeregowej I czwornika formującego (rys. 4). Napięcie na admitancji $Y_1(s)$ określa wzór

$$u_1(t) = u_z - u_0 = 1(t)(U_z - U_0) + 1(t - \tau)U_0$$

lub też wzór

$$U_1(s) = \frac{U_z - U_0}{s} + \frac{U_0}{s} e^{-\tau s}$$

Gdy admitancja $Y_1(s)$ ma postać określoną przez wyrażenie (7a) prąd płynący przez tę gałąź określa wzór

$$I_1(s) = U_1(s) Y_1(s) = \left(\frac{U_z - U_0}{s} + \frac{U_0}{s} e^{-s\tau} \right) \frac{2\pi}{\tau U_z} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n \frac{\nu a_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau} \right)^2}$$

czyli

$$i_1(t) = 1(t) 2 \frac{U_z - U_0}{U_z} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n a_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t + 1(t - \tau) 2 \frac{U_0}{U_z} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n a_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} (t - \tau)$$

lub też

$$i_1(t) = 0, \quad \text{dla } t < 0$$

$$i_1(t) = 2 \frac{U_z - U_0}{U_z} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n a_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \tau$$

$$i_1(t) = 2 \frac{U_z - 2U_0}{U_z} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n a_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{dla } t > \tau.$$

Z wyrażenia powyższego wynika bezpośrednio własność c) — prąd płynący przez gałąź szeregową I , a więc i przez zasilacz, staje się równy zero tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (8).

Energię pobraną ze źródła w czasie trwania impulsu określa wyrażenie

$$W = \int_0^\tau U_z i_1(t) dt = 2(U_z - U_0) \int_0^\tau \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n a_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t dt = \frac{4\tau}{\pi} (U_z - U_0) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^n \frac{a_\nu}{\nu}.$$

W zakresie $2U_0 \leq U_z < \infty$ energia ta jest oczywiście najmniejsza przy $U_z = 2U_0$, a więc własność b) można również uważać za udowodnioną.

W dalszej części niniejszej pracy rozpatrywany jest tylko przypadek, gdy spełnione jest założenie (8).

5. BŁĄD APROKSYMACJI

Jak łatwo stwierdzić na podstawie wyrażen (9), wytworzenie impulsu o kształcie identycznym z pożądanym możliwe jest jedynie w przypadkach, gdy

a) do wiernego odtworzenia kształtu impulsu wystarczy w wyrażeniu (4) skończona liczba składników, tj. gdy współczynniki

$$a_\nu = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau i_0(t) \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \cdot dt$$

stają się równe zero przy ν większych od pewnej liczby

b) gdy współczynniki te są nieujemne dla ν nieparzystych i niedodatnie dla ν parzystych.

W innych przypadkach, a także wtedy, gdy kształt impulsu spełnia wprawdzie wyżej wymienione warunki, lecz liczba współczynników ν o wartościach różnych od zera jest zbyt duża, a liczba elementów czwórnika formującego ograniczona przez względy konstrukcyjne możliwa jest jedynie generacja impulsu o kształcie zbliżonym do pożądanego.

Istnieją różne kryteria oceny tego przybliżenia. W rozważanym przypadku szczególnie przydatne, ze względu na prostotę obliczeń jest kryterium błędu kwadratowego, w myśl którego miarą błędu aproksymacji jest wielkość

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta i^2(t) dt,$$

gdzie $\Delta i(t)$ oznacza różnicę między przebiegiem czasowym impulsu pożądanego a przebiegiem czasowym impulsu generowanego przez układ.

Wzór na wartość ε w rozpatrywanym przypadku można wyprowadzić w sposób następujący.

Pożądany impuls prądu przez obciążenie może być przedstawiony w postaci (por. wzór (2))

$$i(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \text{ i } t > \tau$$

$$i(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (10)$$

gdzie

$$a_{\nu} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} i(t) \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \cdot dt.$$

Z drugiej strony, jeśli admitancje czwórnika formującego mają postać określoną przez wyrażenia¹

¹ Można łatwo wykazać, że admitancja $Y_1(s)$ może mieć bieguny co najwyżej w punktach

$$\pm j \frac{\pi}{\tau}, \quad \pm j 3 \frac{\pi}{\tau}, \quad \pm j 5 \frac{\pi}{\tau}, \dots$$

admitancja zaś $Y_2(s)$ co najwyżej w punktach

$$\pm j 2 \frac{\pi}{\tau}, \quad \pm j 4 \frac{\pi}{\tau}, \quad \pm j 6 \frac{\pi}{\tau}, \dots$$

gdyż w przeciwnym przypadku prąd płynący przez gałąź obciążenia nie spełniałby założenia II.

$$Y_1(s) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^m \frac{b_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2}, \quad (11)$$

$$Y_2(s) = \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^m \frac{b_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (12)$$

to prądy w obu jego gałęziach określają wyrażenia

$$I_1(s) = \frac{U_0}{s} (1 + e^{-s\tau}) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^m \frac{b_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{U_0}{s} (1 - e^{-s\tau}) \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^m \frac{b_\nu s}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2}$$

Prąd przez obciążenie jest różnicą tych prądów i jest określony przez wzór

$$\begin{aligned} I_0(s) &= I_1(s) - I_2(s) = \\ &= U_0 (1 + e^{-s\tau}) \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^m \frac{b_\nu}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} - U_0 (1 - e^{-s\tau}) \sum_{\nu=2,4,6,\dots}^m \frac{b_\nu}{s^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \end{aligned}$$

lub w obszarze czasu

$$\begin{aligned} i_0(t) &= \frac{U_0 \tau}{\pi} \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{b_\nu}{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \tau \\ i_0(t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \text{ i } t > \tau. \end{aligned}$$

Przebieg czasowy błędu aproksymacji można zatem wyrazić jako

$$\begin{aligned} \Delta i(t) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_\nu - (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_\nu \right] \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \Delta i(t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t < 0 \text{ i } t > \tau \end{aligned}$$

oraz

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta i^2(t) dt = \int_0^\tau \Delta i^2(t) dt = \frac{\tau}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_\nu - (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_\nu \right]^2. \quad (13)$$

Z wyrażenia (13) wynikają następujące wnioski:

- a) Jeśli wartości współczynników a_ν są nieujemne dla nieparzystych ν i niedodatnie dla parzystych ν , łączna zaś liczba biegunów admittancji $Y_1(s)$ i $Y_2(s)$ nie może być większa od określonej liczby m (ograniczenie to wynika z liczby elementów jakie mogą być użyte do budowy czwórnika), wtedy minimalny błąd otrzymuje się wybierając m współczynników a'_ν o największych wartościach bezwzględnych i tak przyporządkowując im wartości współczynników b_ν , by spełniona była zależność

$$b_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{\pi \nu}{U_0 \tau} a'_\nu \quad (14)$$

W przypadku tym przez powiększenie liczby elementów czwórnika możliwe jest odtworzenie pożądanego kształtu impulsu z dowolną dokładnością.

- b) Jeśli zadany impuls ma taki kształt, że niektóre ze współczynników a_ν nie spełniają warunków wymienionych w p. a), to minimalny błąd otrzymuje się określając z pośród pozostałych współczynników te, które mają największe wartości bezwzględne i stosując odpowiednio wzór (14).

W przypadku tym, niezależnie od liczby elementów użytych do budowy czwórnika formującego, niemożliwe jest sprowadzenie błędu poniżej wartości

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\tau}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} a''^2_\nu,$$

gdzie a''_ν oznaczają te spośród współczynników a_ν , które są dodatnie dla ν parzystych i ujemne dla ν nieparzystych.

Do wyliczeń wartości błędu aproksymacji zamiast wyrażenia (13) wygodniej jest używać innego wzoru, który wyprowadzić można następująco.

Ponieważ przebieg czasowy błędu można przedstawić jako

$$\Delta i(t) = i(t) - \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t$$

skąd

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_0^\tau \left[i(t) - \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \right]^2 dt = \\ &= \int_0^\tau \left[i^2(t) - 2i(t) \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t + \left\{ \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_\nu \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \right\}^2 \right] dt \end{aligned}$$

Uwzględniając wyrażenie (10) w drugim wyrazie podcałkowym można napisać

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_0^{\tau} i^2(t) dt - 2 \int_0^{\tau} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \right] dt + \\ &+ \int_0^{\tau} \left[\sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_{\nu} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} t \right]^2 dt = \\ &= \int_0^{\tau} i^2(t) dt - \tau \sum_{\nu=1}^m a_{\nu} (-1)^{\nu+1} \frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_{\nu} + \frac{\tau}{2} \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{U_0 \tau}{\pi \nu} b_{\nu} \right)^2,\end{aligned}$$

a jeśli współczynniki b_{ν} zostały dobrane wg wzoru (14)

$$\varepsilon = \int_0^{\tau} i^2(t) dt - \frac{\tau}{2} \sum_{\nu=1}^m a_{\nu}'^2, \quad (15)$$

gdzie a_{ν}' oznaczają te spośród współczynników a_{ν} , które zostały użyte we wzorze (14) do określenia współczynników b_{ν} .

Jest rzeczą oczywistą, że wyrażenie (15), zarówno jak wyrażenie (13), określa błąd jedynie w przypadku, gdy nie tylko impuls zadany, lecz również impuls aproksymujący spełnia założenie IIa.

6. PORÓWNANIE Z SYNTEZĄ PRZEPROWADZANĄ PRZY ZAŁOŻENIU LINIOWOŚCI OBCIĄŻENIA

Omówiona wyżej metoda syntezy prowadzi do wniosków dość istotnie różniących się od wyników syntezy zakładającej liniowość obciążenia. Różnice te są następujące.

1. Przy założeniu liniowości obciążenia niemożliwe jest uzyskanie impulsu o skończonym czasie trwania przy skończonej liczbie elementów czwórnik formującego; według proponowanej metody tylko niektóre kształty impulsów wymagałyby stosowania nieskończonej liczby elementów czwórnik.

2. Przy założeniu liniowości obciążenia czwórnik formujący redukuje się do dwójnika szeregowego I jedynie w przypadku impulsu prostokątnego, w każdym innym przypadku konieczny jest również dwójnik równoległy II; wg proponowanej metody impulsy symetryczne względem prostej picnowej przeprowadzonej w punkcie $t = \frac{\tau}{2}$ (zawierające tylko nieparzyste współczynniki a_{ν}) realizuje się bez udziału dwójnika II.

3. Przy założeniu liniowości obciążenia udowadnia się, że niemożliwe jest wytworzenie impulsu, który zawierałby jednocześnie parzyste i nieparzyste współczynniki a_v ; wg proponowanej metody realizacja takich kształtów jest możliwa.

4. Przy założeniu liniowości obciążenia nie można podać wzoru określającego dokładnie błąd aproksymacji; w proponowanej metodzie wzór taki istnieje i jest stosunkowo prosty.

5. Przy założeniu liniowości obciążenia szereg kształtów impulsów realizowalnych bez trudu metodą proponowaną można realizować jedynie za pomocą czwórników, w których po zakończeniu impulsu krążą prądy wewnętrzne.

Przykład

Należy wyznaczyć admitancje gałęzi szeregowej i równoległej czwórnika formującego impuls trójkątny przedstawiony na rys. 6. Obciążenie stanowi magnesotron o nominalnym napięciu pracy U_0 . Należy obliczyć błąd przy liczbie elementów LC użytych do budowy czwórnika nie większej od 12.

Obliczamy wartości współczynników a_v ze wzoru (3)

$$a_v = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{I_M}{\tau} t \sin v \frac{\pi}{\tau} t \cdot dt = \frac{2I_M}{\pi v} (-1)^{v+1}.$$

Współczynniki te są dodatnie dla v nieparzystych i ujemne dla v parzystych. Impuls ten można by zatem aproksymować z dowolną dokładnością. Ponieważ współczynniki a_v maleją monotonicznie ze wzrostem v , minimalny błąd otrzymuje się podstawiając do wzoru (14) te z nich, które mają najniższe indeksy.

Przy ograniczonej do 12 liczbie elementów czwórnika łączna liczba biegunów admitancji obu gałęzi czwórnika nie może być większa od 6.

Z podstawień do wzoru (14) otrzymujemy

$$b_v = \frac{2I_M}{U_0 \tau} \quad \text{dla} \quad v=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b_v = 0 \quad \text{dla} \quad v \geq 7.$$

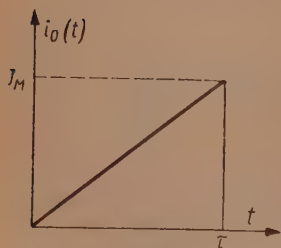
Admitancje gałęzi czwórnika formującego mają zatem postać

a) gałąź szeregową

$$Y_1(s) = \frac{2I_M}{U_0 \tau} \left[\frac{s}{s^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} + \frac{s}{s^2 + \left(3\frac{\pi}{\tau}\right)^2} + \frac{s}{s^2 + \left(5\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \right],$$

b) gałąź równoległa

$$Y_2(s) = \frac{2I_M}{U_0 \tau} \left[\frac{s}{s^2 + \left(2\frac{\pi}{\tau}\right)^2} + \frac{s}{s^2 + \left(4\frac{\pi}{\tau}\right)^2} + \frac{s}{s^2 + \left(6\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \right].$$



Rys. 6.

THE SYNTHESIS OF PULSE FORMING NETWORKS ON THE MAGNETRON LOAD

A new approach to the synthesis of two-port reactive circuits designed to form pulses on the magnetron load is presented. The real characteristic of the magnetron shown in the Fig. 2 is replaced by the ideal one marked *a* in that figure. If we confine our attention to the form of the two-port circuit shown in Fig. 3, the admittances of the branch I and branch II will be given by formulae (9a) and (9b), where the coefficient a_v is done by formula (3), $i_0(t)$ is the current pulse we want to generate. The exact value of the error of the approximation in the time domain may be expressed in the form (13) and (15).

The results of the proposed approach differ from that obtained by the assumption of the linearity of the load in the following points:

1. It is possible to obtain pluses of finite duration using forming networks composed of finite number of elements.
2. When the pulses to be generated are symmetrical, the considered four-pole is reduced to branch I only.
3. It is not possible to generate antisymmetrical pulses (because of the type of the load concerned), but the pulse shapes containing both symmetrical and antisymmetrical components are easily realisable.
4. The formula for the approximation error is done in an explicit and simple form.
5. Many shapes of symmetrical pulses, which can be generated in the resistive linear load only when the internal currents are flowing inside the forming network after the pulse has been generated, are realisable on the magnetron load without such limitation.

526.91:921.396.96.

K. HOLEJKO

Fizyczne podstawy pomiarów krótkich odległości geodezyjnych za pomocą przyrządów elektronicznych

Praca ma na celu wprowadzenie w zagadnienie pomiaru odległości geodezyjnych metodą elektroniczną.

Omówiono metodę pomiaru odległości za pomocą pomiaru przesunięcia fazowego sinusoidalnej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się pomiędzy dwoma punktami, w których ustawione są odpowiednie układy pomiarowe. Rozpatrzono niektóre błędy pomiarowe występujące w tej metodzie. Przeprowadzono analizę pracy dwu systemów pomiarowych, z których jeden oparty jest na zasadzie pomiaru przesunięcia fazowego bezpośrednio na fali nośnej, drugi na pomiarze przesunięcia fazowego sygnału modulującego.

Rozpatrzono niektóre metody pozwalające w prosty sposób określić całkowitą liczbę fal zawartych w mierzonym odcinku.

1. WSTĘP

W ostatnich latach szeroko rozwinęły się układy przeznaczone do bezpośredniego pomiaru odległości geodezyjnych z dużą dokładnością rzędu 10^{-5} — 10^{-6} .

Pomijając czysto optyczne układy można z powyższych odległościomierzy wyodrębnić trzy podstawowe grupy:

1. układy radiolokacyjne impulsowe (np. „Shoran”)
2. układy świetlne wykorzystujące do pomiaru odległości falę świetlną zmodulowaną jasnościowo.
3. układy elektroniczne pracujące na fali ciągłej.

Ze względu na stosunkowo duży bezwzględny błąd pomiaru układy impulsowe nie nadają się do pomiarów krótkich odległości rzędu kilku kilometrów. Wymaganą dokładność pomiaru odległości (z bezwzględnym błędem rzędu kilku centymetrów) można natomiast uzyskać mierząc nie czas, lecz inną wielkość charakteryzującą przebytą drogę fali elektromagnetycznej, np. przesunięcie fazowe. Jeżeli wzdłuż odcinka AB przestrzeni rozchodzi się ze stałą prędkością sinusoidalna fala elektromagnetyczna o częstotliwości f to, w dowolnej chwili różnica faz tej fali w punktach

A i B jest stała i zależy tylko od odległości AB . Zakładając, że fala elektromagnetyczna rozchodzi się w wolnej i jednorodnej przestrzeni wzdłuż odcinka AB , można tę odległość określić jako

gdzie:
$$l = AB = \lambda \psi = \frac{c}{f} (n + \Phi), \quad (1)$$

λ — długość fali,

ψ — całkowite przesunięcie fazowe na odcinku AB , przy przyjęciu kąta pełnego za jednostkę miary,

c — szybkość rozchodzenia się fali,

f — częstotliwość,

n — całkowita liczba odcinków o długości λ mieszczących się w odcinku AB ,

Φ — część ułamkowa liczby ψ odpowiadająca wskazaniu fazomierza.

Zatem przy znanej szybkości rozchodzenia się fali c oraz przy ustalonej częstotliwości f , pomiar sprowadza się do odczytu wielkości Φ na fazomierzu oraz do określenia liczby n . Błąd względny określający dokładność pomiaru wyznacza wzór

$$\frac{\Delta l}{l} = \left| \frac{\Delta c}{c} \right| + \left| \frac{\Delta f}{f} \right| + \left| \frac{\Delta \Phi}{n + \Phi} \right| = \left| \frac{\Delta c}{c} \right| + \left| \frac{\Delta f}{f} \right| + \left| \Delta \Phi \frac{\lambda}{l} \right| \quad (2)$$

gdzie

Δc — błąd bezwzględny, z jakim określona jest szybkość rozchodzenia się fali,

Δf — błąd bezwzględny, z jakim określona jest częstotliwość,

$\Delta \Phi$ — błąd bezwzględny fazomierza.

Jak widać, względny błąd pomiaru składa się z błędu wprowadzanego przez przestrzeń oraz z błędów wprowadzanych przez sam układ pomiarowy.

Błąd wprowadzany przez przestrzeń wynika ze zmiennej szybkości rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w różnych warunkach atmosferycznych. Analiza wielkości tego błędu przekracza ramy niniejszej pracy. Można tu jedynie stwierdzić, że wprowadzenie odpowiednich poprawek uwzględniających temperaturę, ciśnienie oraz wilgotność powietrza w danych warunkach pomiarowych pozwala sprowadzić błąd

$\left| \frac{\Delta c}{c} \right|$ do rzędu $10^{-5} - 10^{-6}$

Jeśli idzie natomiast o błąd wprowadzany przez układ pomiarowy, to można zauważyć że składa się on z błędu stałego niezależnego od odległości oraz z błędu zmieniającego się z odległością. Błąd stały określony przez wyrażenie $\left| \frac{\Delta f}{f} \right|$ może być łatwo uczyniczny rzędu 10^{-6} przez odpowiednią stabilizację częstotliwości pomiarowej f .

Błąd zmienny zależy z kolei od dokładności fazomierza oraz od stosunku długości fali do odległości mierzonej. Zwykle błąd pomiaru przeciętnych fazomierzy ograniczony jest do wartości ok. $\pm 2^\circ$ co odpowiada $\Delta\Phi = 5,510^{-3}$.

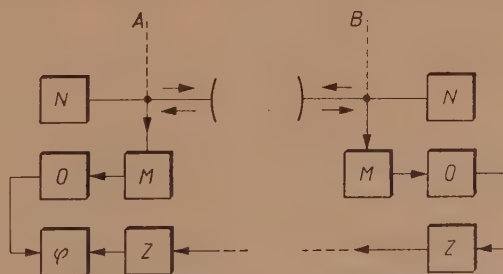
Jest więc rzeczą oczywistą, że przy pomiarach krótkich odległości, dla których $\frac{\lambda}{l}$ nie jest dostatecznie małe, błąd ten decydować będzie o względnej dokładności pomiaru.

Należy tu jeszcze dodać, że założenie o przeprowadzaniu pomiarów w warunkach wolnej przestrzeni przeważnie nie jest spełnione. Zwykle bowiem punkty AB, pomiędzy którymi dokonywany jest pomiar, znajdują się na pewnej wysokości nad ziemią, w związku z czym występują odbicia fali od powierzchni ziemi. Odbicia te są źródłem dalszych błędów, analiza których przekracza ramy niniejszego artykułu.

W niniejszym artykule omówione natomiast zostaną podstawowe zasady pracy odległościomierzy elektronicznych, w których pomiar odległości oparty jest o wzór (1).

2. POMIAR FAZY SYGNAŁU NA CZĘSTOTLIWOŚCI NOŚNEJ

Jednym z możliwych rozwiązań układu do pomiaru przesunięcia fazowego fali elektromagnetycznej pomiędzy dwoma punktami A i B jest zespół pomiarowy przedstawiony na rys. 1. Zespół ten składa się z 2 ukła-



Rys. 1: Pomiar fazy na częstotliwości nośnej.

dów ustawionych na końcach mierzonego odcinka (punkty A i B). Każdy układ posiada nadajnik (N) pracujący stale na określonej częstotliwości oraz odbiornik (O) dołączony do wspólnej nadawczo odbiorczej anteny.

Pomiar odległości sprowadza się do porównania faz sygnałów występujących na wyjściu odbiorników A i B fazomierzem (φ). Fazomierz (φ) znajduje się na jednym ze stanowisk pomiarowych, np. w punkcie A. W tym przypadku informacja o fazie sygnału wyjściowego B przesyłana jest do stanowiska A za pomocą toru zwrotnego (Z).

Wyprowadzimy teraz zależności wiążące fazy sygnałów na wejściu układu pomiarowego, z fazami przebiegów w innych punktach systemu. Założymy, że wartość chwilowa napięcia nadajnika (N_A) w punkcie A wynosi

$$u_A = U_A \sin(\omega_A t + \varphi_A) \quad (3)$$

natomiast odpowiednie napięcie nadajnika (N_B) w punkcie B

$$u_B = U_B \sin(\omega_B t + \varphi_B). \quad (4)$$

W ostatnich wyrażeniach φ_A i φ_B są fazami początkowymi napięć u_A i u_B w chwili $t=0$.

Założymy również, że każdy z podzespołów układów A i B wprowadza zniekształcenia amplitudowe i fazowe przenoszonych sygnałów. Zniekształcenia te scharakteryzować można oddzielnie dla każdego podzespołu współczynnikiem przenoszenia

$$\hat{K}(\omega) = K(\omega) e^{-j\varphi(\omega)} = \frac{\hat{U}_{wyj}}{\hat{U}_{wej}}.$$

W wyniku tego, że oba układy A i B promieniują stale sygnały (3) i (4), na wejście każdego z mieszaczy (M) dostają się dwa sygnały, jeden z własnego nadajnika, drugi odebrany, pochodzący z drugiego układu. Zmianę parametrów sygnału po przejściu drogi AB scharakteryzować można również pewnym współczynnikiem przenoszenia przestrzeni rozumianym jako stosunek napięć o tej samej częstotliwości, liczonych w punktach A i B dla tej samej chwili t

$$\hat{S}(\omega) = \frac{[\hat{U}(\omega)]_A}{[\hat{U}(\omega)]_B} = S(\omega) e^{-j(\omega\tau)}, \quad (5)$$

gdzie τ jest czasem przejścia fali pomiędzy punktami A i B, a $\omega\tau$ jest opóźnieniem fazy przebiegu o pulsacji ω , wprowadzanym przez przestrzeń.

Opierając się na wyrażeniach (3), (4) i (5) oraz wprowadzając współczynnik przenoszenia obwodów wejściowych mieszaczy $\hat{K}_w(\omega) = K_w(\omega) e^{-j\varphi_w(\omega)}$ można napisać wyrażenia na sygnały wchodzące na mieszacze.

W układzie A:

$$u_{mA} = K_{wA}(\omega_A) U_A \sin[\omega_A t + \varphi_A - \varphi_{wA}(\omega_A)] + S(\omega_B) K_{wA}(\omega_B) U_B \sin[\omega_B t + \varphi_B - \varphi_{wA}(\omega_B)]. \quad (6)$$

W układzie B :

$$u_{mB} = S(\omega_A) K_{wB}(\omega_A) U_A \sin[\omega_A t + \varphi_A - \omega_A \tau - \varphi_{wB}(\omega_A)] + K_{wB}(\omega_B) U_B \sin[\omega_B t + \varphi_B - \varphi_{wB}(\omega_B)]. \quad (7)$$

Założmy dalej, że powyższe sygnały podlegają mieszanii w mieszaczach, których charakterystyki statyczne $i = f(u)$ w pobliżu punktu pracy można przedstawić analitycznie w postaci szeregu Taylora

$$i = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + \dots$$

W wyniku mieszania powstaje szereg częstotliwości kombinowanych przebiegów (6) i (7). Wzmacniacze pośredniej częstotliwości układów A i B są nastrojone na częstotliwość różnicową $|f_A - f_B|$. Dzięki temu na wyjściu odbiorników wystąpią jedynie sygnały o podstawowej częstotliwości różnicowej $|f_A - f_B|$ wytworzone głównie dzięki kwadratowym członom C_2 nieliniowych charakterystyk mieszaczy. Należy tu dodać, że podstawowe tony różnicowe wytwarzane są również dzięki innym wyrazom szeregu o potęgach parzystych. Wpływ dalszych członów ogranicza się jedynie do zmiany amplitudy sygnału różnicowego, przy czym zmiana ta, wobec szybkiej zbieżności szeregu $i = f(u)$ jest niewielka.

Zakładając, że $\omega_A > \omega_B$ i oznaczając współczynniki przenoszenia wzmacniaczy pośredniej częstotliwości jako $\hat{K}_0(\omega)$, można napisać następujące wyrażenia dla sygnałów na ich wyjściach:

Układ A

$$u_{0A} = U_{0A} \cos[\omega_r t + \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{wA}(\omega_A) + \varphi_{wA}(\omega_B) + \omega_B \tau - \varphi_{0A}(\omega_r)], \quad (8)$$

gdzie $\omega_r = \omega_A - \omega_B$;

$$U_{0A} = C_{2A} R_A K_{wA}(\omega_A) K_{wA}(\omega_B) S(\omega_B) K_{0A}(\omega_r) U_A U_B,$$

R — jest oporem dynamicznym obwodu wejściowego wzmacniacza pośredniej częstotliwości.

Układ B

$$u_{0B} = U_{0B} \cos[\omega_r t + \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{wB}(\omega_A) + \varphi_{wB}(\omega_B) - \omega_A \tau - \varphi_{0B}(\omega_r)], \quad (9)$$

gdzie

$$U_{0B} = C_{2B} R_B K_{wB}(\omega_A) K_{wB}(\omega_B) S(\omega_A) K_{0B}(\omega_r) U_A U_B.$$

Z kolei sygnał wyjściowy u_{0B} (9) przesyłany jest zwrotnie do układu A. Nie wnikając tu w konkretny sposób rozwiązania układowego, można również ton zwrotny scharakteryzować odpowiednim współczynnikiem przenoszenia.

Współczynnik ten ujmuje zniekształcenia wprowadzane zarówno przez poszczególne układy toru, jak też i przez przestrzeń AB

$$K_{zw}(\omega_r) = K_{zw}(\omega_r) e^{-j[\varphi_{zw}(\omega_r) + \omega_r \tau]}. \quad (10)$$

Ostatecznie na fazomierz (φ) w układzie A wchodzi następujące sygnały

$$u_{0A} = U_{0A} \cos[\omega_r t + \varphi_A - \varphi - \varphi_{wA}(\omega_A) + \varphi_{wA}(\omega_B) + \omega_B \tau - \varphi_{0A}(\omega_r)]$$

oraz

$$u'_{0B} = U'_{0B} \cos [\omega_r t + \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{wB}(\omega_A) + \\ + \varphi_{wB}(\omega_B) - \omega_A \tau - \varphi_{0B}(\omega_r) - \varphi_{zw}(\omega_r) - \omega_r \tau], \quad (11)$$

gdzie

$$U'_{0B} = U_{0B} K_{zw}(\omega_r).$$

Natomiast przesunięcie fazowe sygnału u'_{0B} względem sygnału u_{0A} , będące wskazaniem fazomierza określa wzór:

$$\Phi = -2\omega_A \tau + [\varphi_{wB}(\omega_B) - \varphi_{wB}(\omega_A)] - [\varphi_{wA}(\omega_B) - \varphi_{wA}(\omega_A)] - \\ - \varphi_{0B}(\omega_r) + \varphi_{0A}(\omega_r) - \varphi_{zw}(\omega_r). \quad (12)$$

Postępując podobnie, obliczyć można analogiczne wyrażenie przy założeniu że $\omega_B > \omega_A$ tj. gdy $\omega_r = \omega_B - \omega_A$

$$\Phi' = 2\omega_A \tau - [\varphi'_{wB}(\omega_B) - \varphi_{wB}(\omega_A)] - [\varphi'_{wB}(\omega_B) - \varphi'_{wA}(\omega_A)] - \\ - \varphi_{0B}(\omega_r) + \varphi_{0A}(\omega_r) - \varphi_{zw}(\omega_r), \quad (13)$$

gdzie przesunięcia $\varphi'_w(\omega)$ są odpowiednimi przesunięciami fazowymi obwodów wejściowych dla przypadku $\omega_B > \omega_A$.

Wprowadźmy jeszcze następujące założenia:

1. założmy, że pomiary określone wyrażeniami (12) i (13) zostały przeprowadzone przy stałej wartości ω_B i ω_r przy czym wartość ω_A wynosi odpowiednio:

$$\omega_A = \omega_B + \omega_r \quad \text{oraz} \quad \omega'_A = \omega_B - \omega_r;$$

2. założmy również, że obwody wejściowe obu układów są odpowiednio zestrojone i dostatecznie szerokopasmowe, to znaczy, że w rozpatrywanym zakresie częstotliwości równym $(f_B \pm f_r)$ przesunięcie fazowe wprowadzone przez te obwody są liniowymi funkcjami częstotliwości.

Dzięki tym założeniom zachodzą następujące zależności.

$$[\varphi_{wB}(\omega_B) - \varphi_{wB}(\omega_A)] = -[\varphi'_{wB}(\omega_B) - \varphi'_{wB}(\omega_A)],$$

$$[\varphi_{wA}(\omega_B) - \varphi_{wA}(\omega_A)] = -[\varphi'_{wA}(\omega_B) - \varphi'_{wA}(\omega_A)],$$

natomiast średnia arytmetyczna wskazań fazomierza, równa średniej wyrażen (12) i (13) określona jest wzorem

$$\Phi_{sr} = \frac{\Phi' - \Phi}{2} = \frac{2(\omega_B - \omega_r) \tau + 2(\omega_B + \omega_r) \tau}{2} = 2\omega_B \tau. \quad (14)$$

Na podstawie wyrażenia (14) wyciągnąć można następujące wnioski:

1. Średnia wskazań fazomierza zgodnie ze wzorem (14) jest częścią ułamkową liczby ψ , przy czym jej wartość zmienia się o pełny kąt, gdy odległość AB zmienia się o $\Delta l = \frac{\lambda_B}{2} = \frac{c}{2f_B} \tau$. W związku z tym wzór (1)

przybierze postać

$$l = AB = \frac{\lambda_B}{2} \psi = \frac{c}{2f_B} (n + \Phi). \quad (15)$$

2. Poszczególne wskazania fazomierza nie zależą od początkowych faz φ_A i φ_B sygnałów u_A i u_B (por. (3) i (4)).

3. Przesunięcia fazowe wprowadzane przez oba układy mogą być eliminowane z ostatecznego wyniku pomiarowego przez obliczenie średniej poszczególnych odczytów fazomierza (12) i (13). Należy podkreślić, że przesunięcia te mogą być eliminowane tylko wówczas, gdy częstotliwości f_A i f_B są w trakcie pomiaru odpowiednio stałe i stabilne.

4. Pomiar fazy odbywa się na częstotliwości różnicowej, która może być wybrana np. w zakresie częstotliwości akustycznych, co znacznie ułatwia konstrukcję fazomierza.

Warto dodać, że założenie dostatecznie szerokiego pasma obwodów wejściowych jest bardzo łatwe do spełnienia, ponieważ zwykle wypadkowe przenoszone pasmo jest małe w stosunku do częstotliwości f_A i f_B .

Pasmo to jest określone wzorem

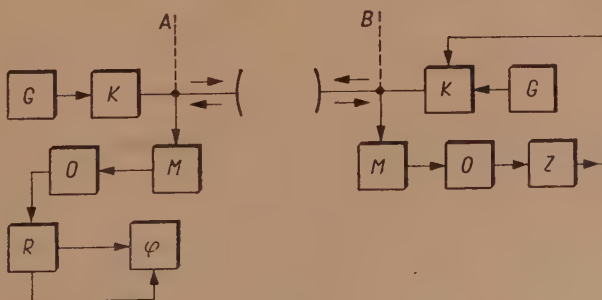
$$\Delta f_{\text{przen}} = 2f_r = 2|f_A - f_B|,$$

przy czym częstotliwości f_A i f_B są zwykle tak dobrane, że

$$\frac{2f_r}{f_A} \ll 1.$$

3. POMIAR FAZY SYGNAŁU MODULUJĄCEGO

Inną metodą pomiaru przesunięcia fazowego fali elektromagnetycznej w przestrzeni jest metoda ilustrowana schematem blokowym na rys. 2. W metodzie tej sygnał pomiarowy o częstotliwości wzorcowej na-



Rys. 2. Pomiar fazy sygnału modulującego.

łożony jest na inny sygnał spełniający rolę fali nośnej. Podobnie jak poprzednio zestaw pomiarowy składa się z dwóch układów ustawionych

na końcach mierzonego odcinka AB . Każdy z tych układów zawiera generator mikrofalowy (K) (np. klistron) pracujący z określonymi częstotliwościami nośnymi f_{nA} i f_{nB} .

Częstotliwości nośne są tak dobrane, że ich różnica równa się częstotliwości pośredniej na którą nastrojone są oba wzmacniacze rezonansowe odbiorników (O). Każdy z generatorów mikrofalowych modulowany jest częstotliwościowo napięciem o częstotliwości wzorcowej f_A lub f_B generowanym w oddzielnym generatorze (G).

Pomiar, podobnie jak poprzednio, polega na porównaniu fazy przebiegów wyjściowych obu odbiorników. W tym celu informacja o fazie sygnału wyjściowego odbiornika B przesyłana jest torem zwrotnym (Z) do układu A . Jako tor zwrotny może być użyty w tym przypadku powtórnie tor wielkiej częstotliwości. Sygnał zwrotny po odebraniu go w odbiorniku A oddzielany jest od właściwego sygnału wyjściowego w układzie rozdzielającym (R), po czym fazy tych ostatnich porównywane są w układzie pomiarowym (φ).

Jak wiadomo, modulacja częstotliwości sygnału $u = U \cos \omega_n t$ przebiegiem sinusoidalnym $u_m = U_m \cos(\omega t + \psi)$ powoduje powstanie widma określonego zależnością:

$$\frac{u}{U} = I_0(m_f) \cos \omega_n t + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(m_f) \{ \cos [(\omega_n + k\omega)t + \psi] + (-1)^k \cos [(\omega_n - k\omega)t - \psi] \}, \quad (16)$$

gdzie $m = \frac{\Delta \omega_n}{\omega}$ — jest wskaźnikiem modulacji

$I_k(m_f)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju k rzędu.

Dla małych wartości wskaźnika modulacji ($m_f < 1$) amplitudy składowych widma wyższych rzędów szybko maleją i wyrażenie (16) można uprościć do postaci

$$\frac{u}{U} = \cos \omega_n t + \frac{1}{2} m_f \cos [(\omega_n + \omega)t + \psi] - \frac{1}{2} m_f \cos [(\omega_n - \omega)t - \psi]. \quad (17)$$

Tytułem przykładu podano w tablicy 1 wartości amplitud poszczególnych składowych widma obliczonych wg wzoru (16) i (17). W dalszych obliczeniach założymy, że wskaźnik modulacji jest mały i że widmo przebiegu zmodulowanego składa się tylko z fali nośnej oraz z dwóch wstępnych bocznych określonych zależnością (17). W konkretnym przypadku założymy, że składowe widma w punktach A i B posiadają następującą postać:

W punkcie A

$$u_A = U_A \left[\cos \omega_{nA} t + \frac{1}{2} m_{fA} \cos (\omega_{nA} + \omega_A) t - \frac{1}{2} m_{fA} \cos (\omega_{nA} - \omega_A) t \right]. \quad (18)$$

Tablica 1

Amplitudy składowych widma

rzęd skład.	wg wzoru (16)		wg wzoru (17)	
	$m_f=03$	$m_f=06$	$m_f=03$	$m_f=06$
$k=0$	$I_0=0.977$	$I_0=0.912$	1	1
$k=1$	$I_1=0.148$	$I_1=0.283$	$\frac{1}{2} m_f=0.15$	$\frac{1}{2} m_f=03$
$k=2$	$I_2=0.0116$	$I_2=0.044$	0	0

W punkcie B

$$u_B = U_B \left[\cos \omega_{nB} t + \frac{1}{2} m_{fB} \cos(\omega_{nB} + \omega_B) t - \frac{1}{2} m_{fB} \cos(\omega_{nB} - \omega_B) t \right]. \quad (19)$$

Wyrażenie (18) i (19) zostało napisane w założeniu, że fazy początkowe składowych widma są równe zeru. Założenie to nie jest istotne i zrobione zostało jedynie dla uproszczenia wyprowadzanych wzorów.

Metoda dalszego postępowania jest analogiczna jak w poprzednim przypadku. Wprowadzimy odpowiednie współczynniki przenoszenia charakteryzujące poszczególne bloki układów oraz przestrzeń pomiędzy układami. Założmy również, że obwody wejściowe są dostatecznie szerokopasmowe i odpowiednio zestrojone, tzn., że w obrębie przenoszonego pasma określonego przez

$$\Delta f_{\text{przen}} = \frac{|\omega_{nA} - \omega_{nB}| + (\omega_A + \omega_B)}{2\pi}$$

moduł współczynnika przenoszenia nie zależy od częstotliwości, natomiast argument tego współczynnika jest liniową funkcją częstotliwości; wobec tego współczynnik przenoszenia obwodów wejściowych

$$\hat{K}_w(\omega) = K_w e^{-j\varphi_w(\omega)}.$$

Podobne założenia wprowadzimy również dla współczynnika przenoszenia przestrzeni

$$\hat{S}(\omega) = S e^{-j\varphi_s(\omega)}.$$

Na każdy z mieszaczy wchodzi sygnały pochodzące z własnego nadajnika oraz nadajnika układu przeciwnieległego.

Sygnały te można zapisać następująco:

W układzie A

$$u_{mA} = U_{mA} \left\{ \cos[\omega_{nA} t - \varphi_{wA}(\omega_{nA})] + \frac{1}{2} m_{fA} \cos[(\omega_{nA} + \omega_A) t - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_{wA}(\omega_{nA} + \omega_A)] - \frac{1}{2} m_{fA} \cos [(\omega_{nA} - \omega_A) t - \varphi_{wA}(\omega_{nA} - \omega_A)] \} + \\
& + U'_{mA} \{ \cos [\omega_{nB}(t - \tau) - \varphi_{wA}(\omega_{nB})] + \frac{1}{2} m_{fB} \cos [(\omega_{nB} + \omega_B)(t - \tau) - \\
& - \varphi_{wA}(\omega_{nB} + \omega_B)] - \frac{1}{2} m_{fB} \cos [(\omega_{nB} - \omega_B)(t - \tau) - \varphi_{wA}(\omega_{nB} - \omega_B)] \} , \quad (20)
\end{aligned}$$

gdzie

$$U_{mA} = U_A K_{wA}$$

$$U'_{mA} = U_B S K_{wA}$$

W układzie B

$$\begin{aligned}
u_{mB} = & U'_{mB} \{ \cos [\omega_{nA}(t - \tau) - \varphi_{wB}(\omega_{nA})] + \frac{1}{2} m_{fA} \cos [(\omega_{nA} + \omega_A)(t - \tau) - \\
& - \varphi_{wB}(\omega_{nA} + \omega_A)] - \frac{1}{2} m_{fA} \cos [(\omega_{nA} - \omega_A)(t - \tau) - \varphi_{wB}(\omega_{nA} - \omega_A)] \} + \\
& + U_{mB} \{ \cos [\omega_{nB} t - \varphi_{wB}(\omega_{nB})] + \frac{1}{2} m_{fB} \cos [(\omega_{nB} + \omega_B) t - \\
& - \varphi_{wB}(\omega_{nB} + \omega_B)] - \frac{1}{2} m_{fB} \cos [(\omega_{nB} - \omega_B) t - \varphi_{wB}(\omega_{nB} - \omega_B)] \} , \quad (21)
\end{aligned}$$

gdzie

$$U'_{mB} = U_A S K_{wB}$$

$$U_{mB} = U_B K_{wB}.$$

Założmy, że charakterystyki statyczne mieszaczy $i=f(u)$ w pobliżu punktu pracy można przedstawić w postaci szeregu Taylora, przy czym rozwinięcie ograniczymy, podobnie jak poprzednio do wyrazu kwadratowego włącznie

$$i = C_0 + C_1 u + C_2 u^2.$$

Założmy dalej, że wzmacniacze pośredniej częstotliwości nastrojone są na częstotliwość $|f_{nA} - f_{nB}|$ oraz że szerokość pasma ΔB tych wzmacniaczy jest tak dobrana, że

$$2|f_A - f_B| \ll \Delta B \ll \begin{cases} 2f_A \\ 2f_B \end{cases} . \quad (22)$$

Dzięki tym założeniom dla sygnałów, których częstotliwości zawierają się w pasmie $|f_{nA} - f_{nB}| \pm |f_A - f_B|$, wzmacniacze pośredniej częstotliwości można traktować jako układy dostatecznie szerokopasmowe.

Wprowadzimy jeszcze współczynniki przenoszenia tych wzmacniaczy

$$\hat{K}_0(\omega) = K_0 e^{-j\varphi_0(\omega)}.$$

Mając na względzie powyższe założenia, można się łatwo przekonać, że na wyjściu wzmacniaczy pośredniej częstotliwości znajdują się jedynie sygnały wynikające z odpowiedniego zdudnienia następujących prążków:

fali nośnej A z falą nośną B ,
wstęgi górnej A z wstęgą górną B oraz
wstęgi dolnej A z wstęgą dolną B .

Sygnały te określone są następującymi wzorami:

W układzie A :

$$\begin{aligned} u_{0A} = & U_{0A} \{ \cos [\omega_p t + \omega_{nB} \tau - \varphi_{wA}(\omega_{nA}) + \varphi_{wA}(\omega_{nB}) - \varphi_{0A}(\omega_p)] + \\ & + \frac{1}{4} m_{fA} m_{fB} \cos [(\omega_p + \omega_r) t + (\omega_{nB} + \omega_B) \tau - \varphi_{wA}(\omega_{nA} + \omega_A) + \\ & + \varphi_{wA}(\omega_{nB} + \omega_B) - \varphi_{0A}(\omega_p + \omega_r)] + \frac{1}{4} m_{fA} m_{fB} \cos [(\omega_p - \omega_r) t + \\ & + (\omega_{nB} - \omega_B) \tau - \varphi_{wA}(\omega_{nA} - \omega_A) + \varphi_{wA}(\omega_{nB} - \omega_B) - \varphi_{0A}(\omega_p - \omega_r)] \}, \quad (23) \end{aligned}$$

gdzie

$$\omega_p = (\omega_{nA} - \omega_{nB}) > 0,$$

$$\omega_r = (\omega_A - \omega_B) > 0,$$

$$U_{0A} = C_{2A} U_{mA} U'_{mA} K_{0A} R_{0A},$$

R_0 — oporność dynamiczna obwodu wejściowego wzmacniacza pośredniej częstotliwości.

W układzie B

$$\begin{aligned} u_{0B} = & U_{0B} \{ \cos [\omega_p t - \omega_{nA} \tau - \varphi_{wB}(\omega_{nA}) + \varphi_{wB}(\omega_{nB}) - \varphi_{0B}(\omega_p)] + \\ & + \frac{1}{4} m_{fA} m_{fB} \cos [(\omega_p + \omega_r) t - (\omega_{nA} + \omega_A) \tau - \varphi_{wB}(\omega_{nA} + \omega_A) + \\ & + \varphi_{wB}(\omega_{nB} + \omega_B) - \varphi_{0B}(\omega_p + \omega_r)] + \frac{1}{4} m_{fA} m_{fB} \cos [(\omega_p - \omega_r) t - \\ & - (\omega_{nA} - \omega_A) \tau - \varphi_{wB}(\omega_{nA} - \omega_A) + \varphi_{wB}(\omega_{nB} - \omega_B) - \varphi_{0B}(\omega_p - \omega_r)] \}, \quad (24) \end{aligned}$$

gdzie

$$U_{0B} = C_{2B} U_{mB} U'_{mB} K_{0B} R_{0B}.$$

Wyrażenia (23) i (24), powstałe w wyniku mieszania się dwóch sygnałów zmodulowanych częstotliwościowo (20) i (21) określają, jak to łatwo zauważyć, sygnał o modulacji amplitudowej, w którym głębokość

$$\text{modulacji } m_a = \frac{1}{2} m_{fA} m_{fB}.$$

Przyjęcie założenia o dostatecznej szerokopasmowości obwodów wejściowych oraz obwodów wzmacniacza pośredniej częstotliwości, równoznaczne z przyjęciem dla tych obwodów liniowej zależności przesunięcia fazowego od częstotliwości, pozwala napisać następujące równości:

$$\begin{aligned}\varphi_w(\omega_{nA} \pm \omega_A) &= \varphi_w(\omega_{nA}) \pm \varphi_w(\omega_A) \\ \varphi_w(\omega_{nB} \pm \omega_B) &= \varphi_w(\omega_{nB}) \pm \varphi_w(\omega_B).\end{aligned}\quad (25)$$

W tych wyrażeniach przesunięcie fazowe $\varphi_w(\omega_A)$ lub $\varphi_w(\omega_B)$ oznacza fizycznie różnicę pomiędzy przesunięciem fazowym fali nośnej i przesunięciami fazowymi wstęp bocznych.

Podobne zależności można napisać dla przesunięć fazowych wprowadzanych przez wzmacniacze pośredniej częstotliwości

$$\varphi_0(\omega_p \pm \omega_r) = \varphi_0(\omega_p) \pm \varphi_0(\omega_r). \quad (26)$$

Wstawiając zależności (25) oraz (26) do równań (23) i (24) można przedstawić równanie obwiedni modulacji jak następuje.

W układzie A

$$u_{obwA} = \frac{1}{2} m_{fA} m_{fB} U_{0A} \cos [\omega_r t + \omega_B \tau - \varphi_{wA}(\omega_A) + \varphi_{wA}(\omega_B) - \varphi_{0A}(\omega_r)]. \quad (27)$$

W układzie B

$$u_{obwB} = \frac{1}{2} m_{fA} m_{fB} U_{0B} \cos [\omega_r t - \omega_A \tau - \varphi_{wB}(\omega_A) + \varphi_{wB}(\omega_B) - \varphi_{0B}(\omega_r)]. \quad (28)$$

Wzmacniacze pośredniej częstotliwości zakończone są detektorami amplitudy, za którymi znajdują się wzmacniacze małej częstotliwości. Zakładając, że detektory te są detektorami idealnymi nie wprowadzającymi żadnych zniekształceń obwiedni oraz charakteryzując wzmacniacze małej częstotliwości współczynnikiem przenoszenia

$$\hat{K}_n(\omega_r) = K_n(\omega_r) e^{-j\varphi_n(\omega_r)}$$

można napisać dla sygnałów na wyjściu odbiorników następujące wzory.

W układzie A

$$u_{wyjA} = U_{wyjA} \cos [\omega_r t + \omega_B \tau - \varphi_{wA}(\omega_A) + \varphi_{wA}(\omega_B) - \varphi_{0A}(\omega_r) - \varphi_{nA}(\omega_r)]. \quad (29)$$

W układzie B

$$u_{wyjB} = U_{wyjB} \cos [\omega_r t - \omega_A \tau - \varphi_{wB}(\omega_A) + \varphi_{wB}(\omega_B) - \varphi_{0B}(\omega_r) - \varphi_{nB}(\omega_r)], \quad (30)$$

gdzie

$$U_{wyj} = \frac{1}{2} m_{fA} m_{fB} U_0 K_n(\omega_r).$$

Aby porównać fazę przebiegów (29) i (30), należy przesłać do układu, w którym znajduje się fazomierz, informację o fazie sygnału drugiego układu.

Nie wnikając w konkretny sposób rozwiązywania układowego, można przesył zwrotny scharakteryzować również odpowiednim współczynnikiem

kiem przenoszenia, ujmującym zniekształcenia sygnału zwrotnego o częstotliwości f_r przy przejściu tego sygnału przez odpowiednie układy toru zwrotnego oraz przez przestrzeń

$$\hat{K}_{zw}(\omega_r) = K_{zw}(\omega_r) e^{-j l \varphi_{zw}(\omega_r) + \omega_r \tau}$$

Ostatecznie na fazomierz w układzie A (rys. 2) przykładane są dwa sygnały określone wzorami:

$$u_{wyjA} = U_{wyjA} \cos [\omega_r t + \omega_B \tau - \varphi_{wA}(\omega_A) + \varphi_{wA}(\omega_B) - \varphi_{0A}(\omega_r) - \varphi_{nA}(\omega_r)] \quad (31)$$

$$u'_{wyjA} = K_{zw}(\omega_r) U_{wyjB} \cos [\omega_r t - \omega_A \tau - \varphi_{wB}(\omega_A) + \varphi_{wB}(\omega_B) - \varphi_{0B}(\omega_r) - \varphi_{nB}(\omega_r) - \varphi_{zw}(\omega_r) - \omega_r \tau]. \quad (32)$$

Natomiast wskazanie fazomierza będące różnicą argumentów sygnałów u_{wyjA} i u'_{wyjA} są wyrażone wzorem

$$\Phi = -2\omega_A \tau - \Delta\varphi_w(\omega_A) + \Delta\varphi_w(\omega_B) - \Delta\varphi_0(\omega_r) - \Delta\varphi_n(\omega_r) - \varphi_{zw}(\omega_r), \quad (33)$$

gdzie

$$\Delta\varphi(\omega) = \varphi_B(\omega) - \varphi_A(\omega).$$

Wzór (33) wyprowadzono przy założeniu, że $\omega_A > \omega_B$ tj. dla $\omega_A = \omega_B + \omega_r$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla innej wartości ω_A , równej $\omega'_A = \omega_B - \omega_r$ można otrzymać na wskazanie fazomierza następujące wyrażenie

$$\Phi' = 2\omega_A \tau - \Delta\varphi_w(\omega_A) + \Delta\varphi_w(\omega_B) - \Delta\varphi_0(\omega_r) - \Delta\varphi_n(\omega_r) - \varphi_{zw}(\omega_r). \quad (34)$$

Natomiast średnia poszczególnych wskazań fazomierza wynosi

$$\Phi_{sr} = \frac{\Phi' - \Phi}{2} = \frac{2(\omega_B - \omega_r)\tau + 2(\omega_B + \omega_r)\tau}{2} = 2\omega_B \tau. \quad (35)$$

Wzór (35) jest analogiczny do wzoru (14) i wszystkie wnioski wynikające ze wzoru (14) są słuszne również i w tym przypadku, a więc odległość określa się wzorem (15)

$$l = \frac{c}{2f_B} (n + \Phi).$$

W dotychczasowych rozważaniach wprowadzone były niektóre założenia upraszczające, które w praktyce nie zawsze są spełnione. Przede wszystkim widmo modulacji częstotliwości (oprócz fali nośnej oraz dwóch wstęg bocznych) posiada jeszcze inne składowe wyższych rzędów, które jak można wykazać, wpływają jedynie na zniekształcenia nieliniowe podstawowego sygnału wyjściowego o częstotliwości f_r . Jednak, ze względu na małe amplitudy składowych wyższych rzędów zniekształcenia nieliniowe, wynikające z odpowiedniego mnożenia wyrazów składowych, są bardzo małe i wpływ ich na wskazanie fazomierza można pominąć.

Drugim uproszczeniem jest przyjęcie założenia o symetryczności widma modulacji częstotliwości i pominięcie wszystkich czynników, które mogą powodować asymetrię tego widma. Powody asymetrii widma mogą być różnorakie (np. zły dobór punktu pracy klustronu, zbyt wąskie pasma przenoszenia układów odbiornika, czy też występowanie efektów odbić od ziemi). Asymetria widma przejawia się wówczas jako asymetria amplitud oraz faz poszczególnych składowych względem fali nośnej. Wskazania fazomierza w takich przypadkach są obarczone pewnym błędem, którego nie można eliminować przez zwykłe uśrednienie wyrażań (33) oraz (34). Analiza tych błędów będzie tematem innej pracy.

4. OKREŚLENIE LICZBY POŁÓWEK FAL W PRZESTRZENI AB

Wskazania fazomierza określone wzorem (14) lub (35) pozwalają jedynie na określenie mierzonej odległości z dokładnością do pełnej liczby połówek fal w odcinku AB. Druga część pomiaru powinna zatem sprzawadzać się do określenia tej liczby.

Wszystkie metody znajdowania liczby n sprowadzają się właściwie do odpowiedniej interpretacji wskazań fazomierza uzyskanych przy różnych częstotliwościach wzorcowych.

Częstotliwość wzorcowa może być zmieniana według następujących zasad:

1. W sposób płynny tak, aby mierzone przesunięcie fazy przyjmowało określone wartości.
2. Skokami, przy z góry ustalonych częstotliwościach wzorcowych.

Sposób płynnej zmiany częstotliwości jest z punktu widzenia operacyjnego bardzo kłopotliwy, ponieważ wymaga jednoczesnej zmiany dwóch częstotliwości wzorcowych (w obu układach), z jednoczesnym zachowaniem stałej ich różnicy.

Znacznie prostsza jest metoda skokowej zmiany częstotliwości wzorcowych.

Przedstawimy liczbę n w układzie dziesiętnym.

$$n = a + 10b + 10^2c + 10^3d + \dots \quad (36)$$

Takie przedstawienie rzutuje już na sposób pomiaru liczby n przez kolejne wyznaczenie cyfr $a, b, c, d, \dots$.

Założmy np. dla uproszczenia rozważań, że maksymalny zakres pomiarowy $l_{\max}$ wynosi 10 km, podstawowa częstotliwość pomiarowa f_0 równa jest $f_0 = 15 \text{ MHz}$, a szybkość rozchodzenia się fal $3 \cdot 10^5 \text{ km/sek}$.

Wówczas $\frac{\lambda_0}{2} = 10 \text{ m}$, natomiast

$$n = a + 10b + 10^2c. \quad (37)$$

Założmy dalej, że wykonana zostanie seria pomiarów na różnych częstotliwościach wzorcowych. Pierwszy pomiar wykonany np. na częstotli-

wości $f_3 = 15 \text{ KHz}$ $\left(\frac{\lambda_3}{2} = 10^3 \frac{\lambda_0}{2} = 10 \text{ Km} \right)$ daje odczyt fazomierza równy φ_3 .

W tym przypadku, ponieważ liczba n_3 równa jest zeru, $\left(0 < l < \frac{\lambda_3}{2} \right)$ przeto mierzona odległość $l = \frac{\lambda_3}{2} \varphi_3$. Pomiar ten nie daje oczywiście wymaganej

dokładności (błąd bezwzględny pomiaru wynosi: $\Delta l_3 = \Delta \varphi \frac{\lambda_3}{2}$ gdzie $\Delta \varphi$

jest błędem fazomierza; przyjmując np. $\Delta \varphi = \frac{1}{200} \div 1,8^\circ$ otrzymuje się

$\Delta l = 50 \text{ m}$). Jednak przy takiej dokładności pomiaru fazy można określić ile dziesiętnych, a nawet setnych części $\frac{\lambda_3}{2}$ zawiera mierzony odcinek.

W ten sposób pierwsza cyfra liczby $10 \varphi_3$ daje cyfrę c we wzorze (37).

Po przeprowadzeniu drugiego pomiaru na częstotliwości $f_2 = 10 f_3$ ($\lambda_2 = 10^2 \lambda_0$) otrzymuje się odczyt fazomierza równy φ_2 przy czym mierzona odległość $l = (c + \varphi_2) \frac{\lambda_2}{2}$ wyznaczona jest już z błędem bezwzględnym

$$\Delta l = \Delta \varphi \frac{\lambda_2}{2} = 5 \text{ m}.$$

Cyfra b jest tutaj pierwszą cyfrą liczby $10 \varphi_2$. Podobnie, stosując $\lambda_1 = 10 \lambda_0$, wyznacza się cyfrę a . Pomiar na podstawowej częstotliwości f_0 określa dziesiąte i setne części $\frac{\lambda_0}{2}$.

Oczywiście, przeprowadzając pomiar φ_3 z dokładnością $\Delta \varphi = \frac{1}{200}$ mo-

żna określić oprócz cyfry c również i cyfrę b , ponieważ wskazania fazomierza mają dokładność dziesiętnych i setnych części kąta pełnego. Zwykle jednak w praktyce cyfrę b wyznacza się z pomiaru φ_2 , natomiast pomiar φ_3 oprócz informacji o cyfrze c , wykorzystuje się dodatkowo do sprawdzenia cyfry b . Powyższe przeliczenia zestawiono w tablicy 2.

W omówionej metodzie częstotliwość wzorcowa musi być zmieniana w szerokich granicach. Z tego względu metoda ta nie nadaje się zupełnie w układzie, w którym pomiaru fazy dokonuje się na fali nośnej. W układzie z modulacją metoda ta wprowadza też pewne komplikacje. Liczbę n można natomiast również wyznaczyć zmieniając podstawową częstotliwość wzorcową w znacznie mniejszych granicach tj. np. o 10%, 1%, 0,1% itd.

Napiszmy wzór (15) w postaci

$$l = \frac{\lambda_0}{2} (n_0 + \varphi_0) = \frac{\lambda_0}{2} \psi_0, \quad (38)$$

Wyznaczanie liczby n

Nr pom.	Odczyt fazo- mierza	Częstotliwość pomiarowa	Połowa dł. fali	Bezwzgl. błąd pomiaru	Pierwsza cyfra liczby
1	φ_3	$f_3 = 15 \text{ kHz}$	$\frac{\lambda_3}{2} = 10^4 \text{ m}$	$\Delta l_3 = 50 \text{ m}$	$10 \varphi_3 = c$
2	φ_2	$f_2 = 150 \text{ kHz}$	$\frac{\lambda_2}{2} = 10^3 \text{ m}$	$\Delta l_2 = 5 \text{ m}$	$10 \varphi_2 = b$
3	φ_1	$f_1 = 1,5 \text{ MHz}$	$\frac{\lambda_1}{2} = 10^2 \text{ m}$	$\Delta l_1 = 0,5 \text{ m}$	$10 \varphi_1 = a$
4	φ_0	$f_0 = 15 \text{ MHz}$	$\frac{\lambda_0}{2} = 10 \text{ m}$	$\Delta l_0 = 5 \text{ cm}$	—

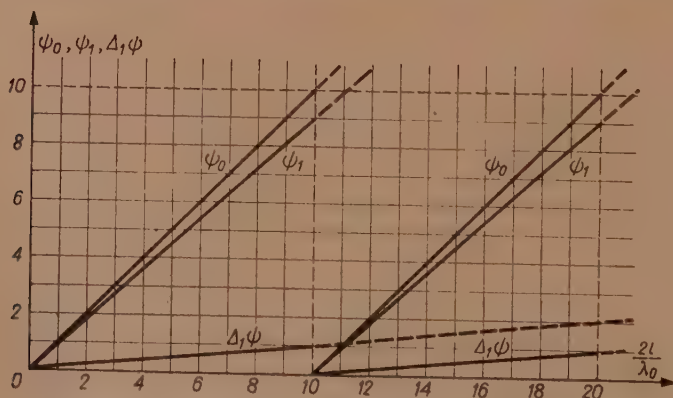
gdzie

$$n_0 = a + 10b + 100c + \dots$$

Założmy teraz, że wykonano inny pomiar na częstotliwości $f_1 = 0,9 f_0$, wówczas

$$l = \frac{\lambda_1}{2} (n_1 + \varphi_1) = \frac{\lambda_1}{2} \psi_1 = \frac{10}{9} \frac{\lambda_0}{2} \psi_1, \quad (39)$$

Na rys. 3 przedstawiono charakterystyki: $\psi_0 = \frac{2l}{\gamma_0}$ oraz $\psi_1 = \frac{9}{10} \frac{2l}{\lambda_0}$.



Rys. 3. Rozkład przesunięcia fazowego w przestrzeni.

Rozpatrzmy teraz różnicę $\Delta_1 \psi = \psi_0 - \psi_1$

$$\Delta_1 \psi = \psi_0 - \psi_1 = 0,1 \frac{2l}{\lambda_0} = 0,1 (n_0 + \varphi_0). \quad (40)$$

Jak widać jest ona proporcjonalna do stosunku $\frac{2l}{\lambda_0}$ zmienia się jednak 10-krotnie wolniej niż ψ_0 (rys. 3). Tzn. osiąga wartość równą $\Delta_1\psi=1$, gdy ψ_0 równe jest 10. Dzięki temu jeżeli tylko znana jest wartość różnicy $\Delta_1\psi$ w granicach $0 < \Delta_1\psi < 1$, to wówczas można określić ilość dziesiątek liczby n_0 tj. cyfrę a .

Rozpisując liczbę n_0 w wyrażeniu (40) otrzymamy

$$\Delta\psi_0 = 01(a + \varphi_0) + b + 10c + \dots$$

Ponieważ $b + 10c + \dots$ jest liczbą całkowitą, a $\Delta_1\psi$ określa się tylko w granicach $0 < \Delta_1\psi < 1$ wobec tego

$$\begin{aligned} 10\Delta_1\psi &= a + \varphi_0, \\ a &= 10\Delta_1\psi - \varphi_0. \end{aligned} \quad (41)$$

Różnicę $\Delta_1\psi$ określa się z kolei bardzo prosto z kolejnych odczytów fazomierza φ_0 i φ_1 jako

$$\begin{aligned} \Delta_1\psi &= \varphi_0 - \varphi_1 & \text{gdy } \varphi_0 > \varphi_1, \\ \Delta_1\psi &= \varphi_0 + 1 - \varphi_1 & \text{gdy } \varphi_0 < \varphi_1. \end{aligned} \quad (42)$$

Drugą cyfrę znaczącą b oraz dalsze cyfry określa się w analogiczny sposób, zmieniając częstotliwość wzorcową o 1%, 0,1% itd. Wówczas, po wykonaniu odpowiednich przeliczeń, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} b &= 10\Delta_2\psi - \frac{a}{10} - \frac{\varphi}{10}, \\ c &= 10\Delta_3\psi - \frac{b}{10} - \frac{a}{100} - \frac{\varphi}{100} \quad \text{itd.} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie} \quad \Delta_n\psi &= \varphi_0 - \varphi_n & \text{gdy } \varphi_0 > \varphi_n \\ \Delta_n\psi &= \varphi_0 + 1 - \varphi_n & \text{gdy } \varphi_0 < \varphi_n. \end{aligned}$$

Zwykle w praktyce upraszcza się jeszcze rachunki i jako cyfry znaczące liczby n_0 bierze się pierwszą cyfrę następujących wyników:

$$\begin{aligned} a &= 10\Delta_1\psi \\ b &= 10\Delta_2\psi \\ c &= 10\Delta_3\psi \quad \text{itd.} \end{aligned} \quad (44)$$

5. ZAKOŃCZENIE

W dotychczasowej analizie rozpatrywano jedynie zjawiska zachodzące w samych układach pomiarowych. Bardzo istotną sprawą jest również analiza zjawisk zachodzących w procesie propagacji fal, ponieważ zjawiska te decydują w dużej mierze o dokładności pomiaru. Analiza ta wykracza już poza ramy niniejszej pracy. Należy tu jedynie stwierdzić,

że względy propagacyjne decydują o przydatności praktycznej omawianych dotychczas układów. Podstawowym czynnikiem, który w dużym stopniu ograniczyć może dokładność pomiaru są odbicia fali elektromagnetycznej od ziemi oraz od przedmiotów terenowych otaczających układy pomiarowe. Ponieważ droga fali odbitej jest zawsze większa od mierzonego odcinka, wzdłuż którego rozchodzi się fala bezpośrednia, przeto wszelkie odbicia wprowadzają pewien błąd pomiaru. Jednym z podstawowych sposobów ograniczenia wpływu odbić jest użycie anten o dostatecznie wąskiej wiązce promieniowania. Ze względu na wymagane małe wymiary anten urządzenia, optymalnym zakresem fal, jaki się tu narzuca, jest zakres mirofalowy.

Z drugiej strony ze względów pomiarowych, a szczególnie ze względu na łatwość wyznaczenia całkowitej liczby połówek fal w przestrzeni, pożądanym jest wybór długości fali pomiarowej w zakresie metrowym fal.

Oprócz tego, ze względu na wymaganą dokładność oraz stabilność pomiaru, która w dużym stopniu zależy od stabilności częstotliwości różnicowej $f_r = |f_A - f_B|$, nakładane są ostre warunki na stałość i stabilność częstotliwości f_A i f_B , co z kolei nie pozwala na wybór częstotliwości w zakresie mikrofalowym.

Z powyższych względów jest rzeczą oczywistą, że układ, w którym pomiaru dokonuje się na fali nośnej i który musi posiadać kompromisowy wybór długości fali, będzie układem wrażliwym na odbicia od ziemi. Optymalnym natomiast rozwiązaniem jest rozdzielenie funkcji fali nośnej od fali pomiarowej, co zrealizowane jest w układzie pomiarowym, omówionym w rozdziale trzecim.

Na zakończenie składam serdeczne podziękowania doc. drowi Stanisławowi Sławińskiemu za szereg krytycznych uwag oraz przejrzenie niniejszej pracy.

WYKAZ LITERATURY

1. Black H. S.: *Modulation theory* D. Van Nostrand Co. Inc. 1953.
2. Briten J.: *Electronic distance measure devices*. Rev. Cartogr. 1957, Nr 6, ss. 63—76.
3. Goldman S.: *Frequency analysis modulation and noise*. New-York, 1948.
4. Kerr D. E.: *Propagation of short radio waves*. Mc Graw Hill Book Co. 1948.
5. Pusztai F.: *Elektronowy i elektronooptyczny pomiar długości*. Przegląd Geodezyjny Nr 10, 1959.
6. Rosenthal A. S.: *Electronic surveying*. Electronics Nr 23, 1959.
7. Rotkiewicz W.: *Technika odbioru radiowego* T. I i II. PWT.
8. Wadley T. L.: *Tellurometer system of distance measurement*. Empire surveying nev, Nr 105, 1957.
9. Zimmerman R.: *Modulacja częstotliwości*. Poznańska Spółka Wydawnicza, 1947.
10. *Surveying instrument for the precise measurement of lenght*. Engineer Nr 5280, 1957.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ КОРОТКИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Целью работы является введение в проблему измерения геодезических расстояний электронными методами. Рассматривается метод измерения расстояния обоснованный на измерении фазового сдвига синусоидальной электромагнитной волны, распространяющейся между двумя точками, в которых устанавливаются соответствующие измерительные приборы. Рассматриваются некоторые измерительные ошибки свойственные этому методу. Приводится анализ работы двух измерительных схем. Первая из них работает по принципу измерения сдвига фазы несущей волны. Во второй схеме измеряется сдвиг фазы модулирующего сигнала наложенного на несущую волну. Рассмотрены некоторые методы позволяющие просто определить количество волн укладывающихся на измерительном расстоянии — выраженное целым числом.

THE PHYSICAL PRINCIPLES OF THE GEODETIC SHORT DISTANCE MEASUREMENTS BY MEANS OF THE ELECTRONIC DEVICES

The object of the present paper is an introduction into the problem of geodetic distance measurements by means of an electronic method. The method based on the phase shift measurement of a sinusoidal r.f. wave travelling between two points equipped with suitable measuring devices is discussed. Some measurement errors, characteristic of this method are examined. Two measurement systems are analysed. One of those system is based on the measurement of the carrier phase shift. The second one is based on the phase shift measurements of the modulating signal superimposed on a carrier. Some methods permitting to determine easily the number of the wave lengths contained in the measured distance are considered.

533.5:531.788.63

J. GROSZKOWSKI

Próżniomierz ciepłno-przewodnościowy o kompresji impulsowej

Rękopis dostarczono 7. 12. 1960.

Zakres pomiarowy próżniomierzy ciepłno-przewodnościowych udaje się przesunąć aż do 10^{-7} Tr przez zastosowanie zasady sprężania gazu o mierzonym ciśnieniu do zbiorniczka o małej objętości, w którym znajduje się element oporowy w układzie mostkowym. Sprężanie gazu (np. tysiąc krotne) uzyskuje się przez przesuwanie tłoka w cylindrze zamkniętym z jednego końca i połączonym kanalikiem z tym właśnie zbiorniczkiem. Próżniomierz jest wykonany ze szkła twardego i minimalnej ilości metali próżniowych. Ponieważ żadne substancje uszczelniające nie są stosowane, szczelność między tłokiem, a cylindrem uzyskuje się jedynie przez doszlifowanie i wypolerowanie odpowiednich ścianek. Jeśli przewodność szczeliny między tłokiem a cylindrem nie przekracza pewnej wartości, a prędkość ruchu tłoka nie jest zbyt mała, stopień sprężania gazu jest określony stosunkiem objętości cylindra do objętości zbiorniczka. Z drugiej strony, jeśli przewodność szczeliny między dnem cylindra a dnem tłoka (który zamyka wlot kanalika) jest odpowiednio mała, czas utrzymywania się ciśnienia po sprężeniu jest dostateczny do tego, aby procesy cieplne w elemencie oporowym mogły się ustalić, zwłaszcza, jeśli cieplną bezwładność tego elementu uczyniono specjalnie małą. Nowy próżniomierz jest wolny od zjawisk pompowania i desorpcji gazów, występujących w próżniomierzach jonizacyjnych, co pozwala na obserwację zachowania się tych próżniomierzy i wyciąganie wniosków odnośnie do działania i ich dokładności. W pracy podano zasady teoretyczne oraz opis budowy nowego próżniomierza.

1. WSTĘP

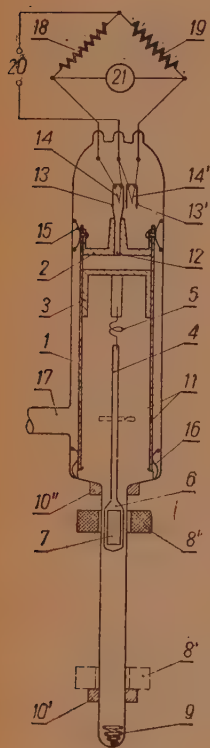
Zagadnienie rozciągnięcia zakresu pomiarowego próżniomierzy ciepłno-przewodnościowych w kierunku niższych ciśnień jest wysoce atrakcyjne ze względu na szereg zalet, jakie posiadają te próżniomierze w porównaniu z próżniomierzami jonizacyjnymi, w których występują zjawiska sorpcji, desorpcji oraz pompowania, jak również rozkład cieplny par.

Znane są prace polegające na zastosowaniu w tym celu uprzedniej kompresji za pomocą rtęci [2] lub naczynia elastycznego [3]. Obecność par rtęci jest wadą pierwszego sposobu, trudności odgazowywania du-

zych powierzchni i mas metalowych stanowią niedogodność obu sposobów. Próžniomierz ciepłno-przewodnościowy o kompresji impulsowej jest próbą rozwiązania tego zagadnienia.

2. BUDOWA I DZIAŁANIE PRÓŻNIOMIERZA

W cylindrze 1 (rys. 1) otwartym z jednego końca, z drugiego zaś zamkniętym za pomocą denka 2, umieszczony jest tłok 3. Te trzy części



Rys. 1. Zasada budowy i układ ciepłno - przewodnościowego próžniomierza kompresyjnego.

są wykonane z twardego szkła. Do tłoka jest przymocowany za pośrednictwem sprężyny 5 pręt 4 zakończony cylindryczną rurką, wewnątrz której zamknięto kawałek żelaza 7. Za pomocą trwałego magnesu 8 tłok może być przesuwany do góry lub na dół. Unosząc magnes do góry podnosimy tłok z położenia najniższego (tuż poniżej otworka 11) do położenia najwyższego, w którym następuje zetknięcie się płaskich powierzchni tłoka i denka. Sprężyna 9 zabezpiecza układ ruchomy przed uszkodzeniem w razie jego opadnięcia. Pierścienie 10 ograniczają ruch tłoka. Wewnętrzna ściana cylindra i zewnętrzne ściany tłoka i denka są szlifowane i wypolerowane; płaskie powierzchnie tłoka i denka są doskonale równoległe i dobrze wypolerowane, tak iż dolegają one szczelnie jedna do drugiej, gdy tłok znajduje się w położeniu górnym. Wąski kanał 12, zaczynający się pośrodku denka, prowadzi do małego naczynia cylindrycznego 13, zawierającego oporowy element ciepłny 14. Drugie takie samo naczynie z identycznym elementem 14' znajduje się obok. Całe urządzenie jest zmontowane w obudowie 16, która jest połączona za pomocą przewodu rurowego 17 z układem próžniowym. Sprężynki 15 służą do zamocowania cylindra. Elementy oporowe są wykonane ze wstążki platynowej, np. o rozmiarach $2\mu \times 50\mu \times 3\text{ cm}$; wstążka jest lekko skrecona w celu jej usztywnienia. Ścianki naczyń z elementami oporowymi są platynowane dla usunięcia efektów elektrostatycznych.

Opory obu elementów stanowią dwie gałęzie mostka, którego dwie pozostałe są utworzone przez dwa oporniki o stałej oporności 18 i 19. Mostek jest zasilany ze źródła napięcia stałego 20 i jest zrównoważony, tak iż prąd w galwanometrze 21 jest równy zeru.

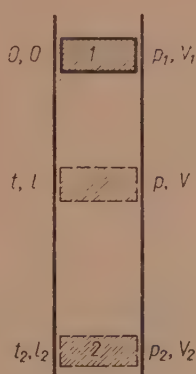
Przesunięcie tłoka z położenia górnego (odpowiadającego pojemności V_1) do położenia dolnego (odpowiadającego pojemności V_2) powoduje

najpierw sprężenie gazu od nieznanego ciśnienia p_1 , do ciśnienia p_2 , a następnie zamknięcie sprężonego gazu w małej pojemności V_2 . Zamknięcie to zachodzi dzięki stosunkowo dobremu przyleganiu powierzchni denka i tłoka. Nierówność ciśnień gazu w otoczeniu obu elementów oporowych powoduje różność wartości oporności tych elementów. Pociąga to za sobą zakłócenia równowagi mostka, a co za tym idzie — wychylenie galwanometru, które jest miarą ciśnienia.

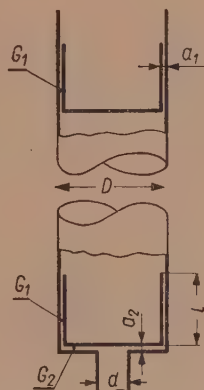
3. KOMPRESJA IMPULSOWA [4]

Urządzenie umożliwiające otrzymywanie kompresji impulsowej przedstawiono na rys. 2. W chwili $t_1=0$ tłok znajduje się w pozycji 1, której odpowiada pojemność V_1 , w chwili t_2 w pozycji 2, której odpowiada pojemność V_2 . Przewodność szczeliny między tłokiem a cylindrem (rys. 3) wynosi G_1 . Jeśli $G_1=0$, można napisać równanie

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = p V. \quad (1)$$



Rys. 2. Położenie tłoka podczas kompresji.



Rys. 3. Przewodności szczelin między tłokiem a cylindrem i tłokiem a denkiem.

Ponieważ

$$V_1 = F l_1 \quad V_2 = F (l_1 - l_2), \quad V = F l \quad (2)$$

gdzie F jest powierzchnią przekroju cylindra, przeto

$$K_v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1}{l_1 - l_2} = \frac{p_2}{p_1}. \quad (3)$$

Pojemność odpowiadająca dowolnemu położeniu tłoka jest

$$V = V_1 - (V_1 - V_2) \frac{l}{l_2}. \quad (4)$$

Jeśli tłok porusza się ruchem jednostajnym z prędkością v , mamy zależności

$$l = vt, \quad l_2 = vt_2 \quad (5)$$

a zatem

$$V = V_1 - (V_1 - V_2) \frac{t}{t_2} \quad (6)$$

oraz

$$p = p_1 \frac{V_1}{V} = p_1 \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{K_v}\right) \frac{t}{t_2}}. \quad (7)$$

Przebieg ciśnienia p w funkcji czasu t pokazano na rys. 4. Nachylenie stycznej do krzywej (7) w chwili $t = t_2$ jest

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=t_2} = p_1 \frac{(K_v - 1) K_v}{t_2} \approx p_1 \frac{K_v^2}{t_2} = p_2 \frac{K_v}{t_2}. \quad (8)$$

Dla $K_v \gg 1$ i $p_1 \approx 0$, krzywa (7) może być zastąpiona przez dwie linie proste 0 i ab (rys. 4). Przeciąg czasu $t_2 - t'$ dany jest tu wyrażeniem

$$t_2 - t' \approx \frac{t_2}{K_v}. \quad (9)$$

Jak widać z (9), czas, w ciągu którego odbywa się największy wzrost ciśnienia, jest bardzo krótki w porównaniu z czasem ruchu tłoka t_2 . Ponieważ szczelność między tłokiem a cylindrem nie jest doskonała, zachodzi częściowy upływ gazu w czasie kompresji; ponadto, wskutek niedoskonałej szczelności między tłokiem a denkiem ciśnienie gazu p_2 w objętości V_2 maleje stopniowo do wartości p_1 , jaka panowała przed sprężeniem. Jeśli $G_1 \neq 0$, między chwilowymi objętościami i ciśnieniami istnieje związek

$$V dp + p dV + G_1 (p - p_1) dt = 0 \quad (10)$$

wynikający z równania zmiany ilości gazu w czasie dt

$$-d(pV) = G_1 (p - p_1) dt. \quad (11)$$

Dzieląc równanie (10) przez $p_1 V_1$, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{V}{V_1} d\left(\frac{p}{p_1}\right) + \frac{p}{p_1} d\left(\frac{V}{V_1}\right) + \frac{G_1}{V_1} t_2 \left(\frac{p}{p_1} - 1\right) d\left(\frac{t}{t_2}\right) = 0 \quad (12)$$

z którego, po rozwiązaniu, otrzymujemy

$$p = p_1 \frac{1}{1 - \mu_1} \left\{ \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{K_v} \right) \frac{t}{t_2} \right]^{1 - \mu_1}} - \mu_1 \right\} \quad (13)$$

gdzie

$$\mu_1 = \frac{G_1}{V_1} t_2. \quad (14)$$

W chwili $t = t_2$, tzn. po pełnej kompresji, ciśnienie jest

$$p_2 = \frac{1}{1 - \mu_1} (K_v^{1 - \mu_1} - \mu_1) p_1. \quad (15)$$

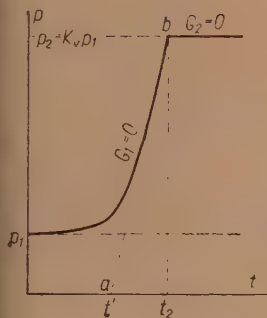
Dla $K_v \gg 1$ i $\mu_1 \ll 1$, równanie (15) przechodzi w równanie

$$p_2 = \frac{K_v^{1 - \mu_1}}{1 - \mu_1} p_1 \approx K_p p_1, \quad (16)$$

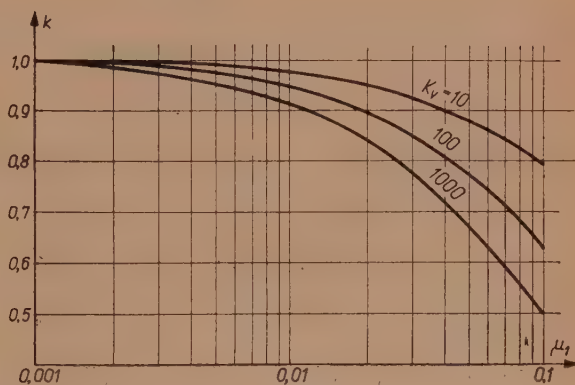
w którym

$$K_p = \frac{K_v^{1 - \mu_1}}{1 - \mu_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (17)$$

jest stopniem kompresji.



Rys. 4. Przebieg ciśnienia dla $G_1=0$ i $G_2=0$.



Rys. 5. Zależność $k=f(\mu_1)$.

Wyrażenie

$$k = \frac{K_p}{K_v} = \frac{1}{(1 - \mu_1) K_v^{\mu_1}} \quad (18)$$

pokazuje w jakim stopniu nieszczelność G_1 zmniejsza stopień kompresji K_p w porównaniu ze stosunkiem objętości K_v .

Zależność

$$k = f(\mu_1)$$

z $K_v = \text{const}$ jako parametrem przedstawiono na rys. 5. Można wykazać, że w przypadku gdy ruch tłoka nie jest jednostajny, lecz odbywa się według zależności

$$l = v_v t^v \quad (19)$$

wyrażenie (18) przybiera postać

$$k_v = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu_1}{v}\right) K_v^{\frac{\mu_1}{v}}} \quad (20)$$

Jak wynika z (20), rola nieszczelności G_1 jest tym mniejsza, im większe jest v , podczas gdy zwiększenie K_v zmniejsza wartość k_v .

Zależność

$$k_v = f\left(\frac{\mu_1}{v}\right) \quad (21)$$

może być łatwo otrzymana z krzywych przedstawionych na rys. 5, jeśli się zastąpi μ_1 przez μ_1/v .

Ażeby wpływ niestałości wielkości μ_1 oraz v na k_v był możliwie mały, (dla $K_v = 10 \div 1000$) wielkość μ_1 powinna być mniejsza od kilku tysięcy. Jeśli więc przyjmujemy np. że $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, to dla danego V_1 powinien być spełniony warunek

$$G_1 t_2 \leq 2 \cdot 10^{-3} V_1. \quad (22)$$

Zakładając teraz $V_1 = 0,5 \text{ l}$, otrzymamy

$$G_1 t_2 \leq 10^{-3}.$$

Jeśli założyć, że $t_2 \approx 0,5 \text{ sek}$, to niezbędna przewodność wyniesie

$$G_1 \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ l/s}.$$

Zatem przewodność szczeliny między tłokiem a cylindrem nie powinna przewyższać kilka razy 10^{-3} l/s , jeśli czas przesunięcia tłoka nie ma być krótszy niż $0,5 \text{ sek}$.

W tych warunkach otrzymamy $k \approx 0,95$, a przeto

$$K_p = k K_v \approx K_v. \quad (23)$$

i ciśnienie po kompresji będzie określone równaniem

$$p_2 \approx K_v p_1, \quad (24)$$

w którym p_1 jest ciśnieniem przed kompresją.

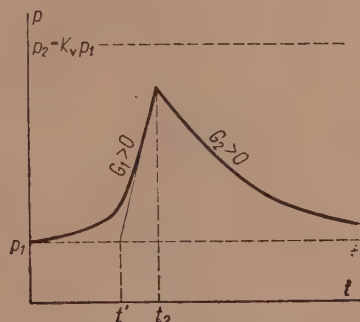
W przypadku gdy przewodność G_2 między tłokiem a denkiem (rys. 2) nie jest równa zero, ciśnienie p_2 nie pozostaje stałe, jakby to miało miejsce dla $G_2 = 0$, lecz maleje w czasie według zależności

$$p = p_2 \exp\left(-\frac{G_2}{V_2} t\right) = p_2 \exp(-m_2 t) \quad (25)$$

jak to pokazano na rys. 6, gdzie czas t jest liczony od chwili t_2 . Po czasie

$$t_e = \frac{1}{m_2} = \frac{V_2}{G_2} \quad (26)$$

ciśnienie to zmaleje do wartości p_2/e .



Rys. 6. Przebieg ciśnienia dla $G_1 > 0$ i $G_2 > 0$.

Biorąc pod uwagę równania (3), (25) i (26), można napisać

$$G_2 = \frac{V_1}{K_v t_e} \quad (27)$$

Zatem G_2 powinno być tym mniejsze, im większe jest K_v i żądany czas t_e . Na przykład, jeśli $V_1 = 0,5$ l i $K_v = 1000$, to $t_e = 5$ s, czyli przewodność $G_2 = 1 \cdot 10^{-4}$ l/s.

Przewodności G_1 i G_2 dla przepływu molekularnego mogą być obliczone ze wzoru [4]

$$G = 27 \frac{a^2 b}{L} \lg \frac{L}{a} \quad (28)$$

w którym L jest długością wąskiej szczeliny o przekroju $a \times b$, gdzie $a \ll b$, przy czym L , a i b są wyrażone w centymetrach.

Dla znalezienia G_1 wprowadzamy do wzoru (28)

$$b = \pi D \quad (29)$$

co daje

$$G_1 = 85 \frac{a_1^2 D}{L} \lg \frac{L}{a_1} \quad (30)$$

Dla znalezienia G_2 możemy przyjąć (rys. 3)

$$b_2 \approx \frac{1}{2} \pi (D + d) \quad (31)$$

oraz

$$L_2 \approx \frac{1}{2}(D-d) \quad (32)$$

a przeto

$$G_2 = 85a_2^2 \frac{D+d}{D-d} \lg \frac{D-d}{2a_2} \quad (33)$$

Przyjmując $L \approx D$ oraz $D/d \approx 5$ jak również zakładając, że a jest rzędu mikronów, podczas gdy L jest rzędu centymetrów, mamy $\lg \frac{D}{a} \approx 4$, a przeto

$$G_1 \approx 350 a_1^2, \quad (34)$$

$$G_2 \approx 350 a_2^2. \quad (35)$$

Zatem dla otrzymania $G_1 \leq 2 \cdot 10^{-3}$ powinno być $a_1 \approx 30 \mu$, a dla otrzymania $G_2 \leq 1 \cdot 10^{-4}$ powinno być $a_2 \approx 5 \mu$.

4. ZACHOWANIE SIĘ ELEMENTU OPOROWEGO PRZY IMPULSOWEJ ZMIANIE CIŚNIENIA [5]

Bilans mocy w elemencie oporowym (przy pominięciu ostygnięcia jego końców) może być wyrażony równaniem

$$I^2 R = \sigma \epsilon_T s (T^4 - T_0^4) + \gamma s p (T - T_0) + \frac{C_H M}{r} \frac{d}{dt} (T - T_0) \quad (36)$$

w którym oznacza:

- I — prąd w elemencie oporowym (A),
- R — oporność elementu oporowego (Ω) w temperaturze T ,
- T — temperatura elementu ($^{\circ}\text{K}$),
- T_0 — temperatura otoczenia ($^{\circ}\text{K}$),
- σ — stałą Stefana-Boltzmann'a $= 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ W cm}^{-2} \text{ stop}^{-4}$,
- ϵ_T — emisyjność elementu w temperaturze T ,
- s — powierzchnię elementu (cm^2),
- γ — ciepłą przewodność gazu ($\text{W cm}^{-2} \text{ stop}^{-1} \text{ Tr}^{-1}$),
- p — ciśnienie gazu (Tr),
- C_H — ciepło właściwe elementu ($\text{cal g}^{-1} \text{ stop}^{-1}$),
- M — masę elementu (g),
- r — równoważnik ciepłno-mechaniczny $= 0,24 \text{ cal W}^{-1} \text{ sek}^{-1}$,
- t — czas (s).

Oporność elementu określona jest wzorem

$$R = R_0 [1 + \beta (T - T_0)] \quad (37)$$

w którym

- R_0 — jest opornością elementu w temperaturze T_0 ,
- β — współczynnikiem cieplnym oporności (stop^{-1}).

Dla metali najczęściej stosowanych na elementy oporowe jest $\beta \approx (3 \div 3,5) \cdot 10^{-3}$, a przeto dla $T_0 \approx 300^\circ \text{K}$ można przyjmować

$$\beta T_0 \approx 1. \quad (38)$$

Zatem równanie (37) przybiera postać

$$R \approx R_0 \beta T = R_0 \frac{T}{T_0}. \quad (39)$$

Z drugiej zaś strony

$$R_0 = \varrho_0 \frac{l}{q} \quad (40)$$

gdzie

ϱ_0 — oporność właściwa materiału elementu oporowego ($\Omega \text{ cm}$)
w temperaturze T_0 ,

l — długość elementu (cm),

q — powierzchnia przekroju elementu (cm^2).

Powierzchnia elementu (cm^2)

$$s = ul \quad (41)$$

gdzie

u — jest obwodem przekroju elementu (cm).

Masa elementu będzie

$$M = ql\delta \quad (42)$$

jeśli przez δ oznaczymy gęstość materiału (g cm^{-3}).

Emisyjność czystych metali może być wyrażona wzorem

$$\varepsilon_T \approx 0,576 \sqrt{\varrho_0 [1 + \beta (T - T_0)] T} \quad (43a)$$

co po uwzględnieniu (38) daje

$$\varepsilon_T \approx 0,576 \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} T, \quad (43b)$$

Z równań (37) $\div$ (43) wynika

$$\begin{aligned} I^2 \varrho_0 \frac{T}{T_0} - 0,576 \sigma u q \sqrt{\frac{\varrho_0}{T}} T (T^4 - T_0^4) - \\ - \gamma u q p (T - T_0) - \frac{C_H q^2 \delta}{r} \frac{d}{dt} (T - T_0) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Założmy, że prąd I jest stały i wynosi I_1 ; poza tym wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\Theta = \frac{T}{T_0} \quad (45)$$

$$A = \frac{0,576 \sigma u q \varrho_0^{1/2} T_0^{3/2}}{I_1^2 \varrho_0} = 0,45 \frac{1}{I_1^2 \varrho_0^{1/2}} \quad (46)$$

$$B = \frac{\gamma u q T_0}{I_1^2 \varrho_0} = \frac{\gamma}{0,576 \sigma \varrho_0^{1/2} T_0^{3/2}} A \approx \frac{600 \gamma}{\varrho_0^{1/2}} A \approx 270 \frac{\gamma}{I_1^2 \varrho_0} \quad (47)$$

$$C = \frac{C_H q^2 \delta T_0}{I_1^2 \varrho_0 r} = \frac{C_H q \delta}{0,576 \sigma u r \varrho_0^{1/2} T_0^{3/2}} A \approx 28 \frac{C_H \delta q}{\varrho_0^{1/2} u} A = 12,5 \frac{C_H \delta q}{I_1^2 \varrho_0 u} \quad (48)$$

Równanie (44) może być więc napisane jako

$$\Theta - A\Theta(\Theta^4 - 1) - Bp(\Theta - 1) - C \frac{d\Theta}{dt} = 0. \quad (49)$$

W ustalonym stanie pracy $\left(\frac{d\Theta}{dt} = 0\right)$, jeśli próżnia jest bardzo dobra, tzn. dla $t \rightarrow \infty$ i $p \approx 0$, równanie (49) sprowadza się do następującego:

$$\Theta_1 - A\Theta_1(\Theta_1^4 - 1) = \Theta_1 [1 - A(\Theta_1^4 - 1)] = 0 \quad (50)$$

gdzie

$$\Theta_1 = \frac{T_1}{T_0} = \frac{R_1}{R_0} \quad (51)$$

T_1 i R_1 oznaczają odpowiednio temperaturę i oporność elementu dla ciśnienia równego zeru; jest to najwyższa temperatura i oporność elementu. Z równania (50) można znaleźć

$$A = \frac{1}{\Theta_1^4 - 1} \quad (52)$$

Wprowadźmy wielkość y , stosownie do zależności

$$\Theta = \Theta_1 - \Delta\Theta = \Theta_1 \left(1 - \frac{\Delta\Theta}{\Theta_1}\right) = \Theta_1 (1 - y) \quad (53)$$

gdzie

$$y = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_1} = \frac{\Delta R}{R_1} \quad (54)$$

oraz

$$\Delta R = R - R_1. \quad (55)$$

Równanie (53), po uwzględnieniu (54), przybiera postać

$$\begin{aligned} &\Theta_1 (1 - y) - A\Theta_1 (1 - y) [\Theta_1^4 (1 - y)^4 - 1] - \\ &- Bp [\Theta_1 (1 - y) - 1] - C\Theta_1 \frac{d}{dt} (1 - y) = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Jeśli $\Theta \approx \Theta_1$, to $y \ll 1$, a przeto można wprowadzić uproszczenie

$$(1 - y)^4 \approx 1 - 4y. \quad (57)$$

Uwzględniając (52) i (57) w (56) otrzymujemy równanie

$$\frac{4\Theta_1^5}{\Theta_1^4 - 1} - Bp[\Theta_1(1-y)-1] + C\Theta_1 \frac{dy}{dt} = 0. \quad (58)$$

Stąd, w stanie ustalonym pracy i dla niskich ciśnień znajdujemy

$$p = \frac{4}{B} \frac{\Theta_1^5}{(\Theta_1^4 - 1)[\Theta_1(1-y)-1]} y. \quad (59)$$

Ponieważ $\Theta_1 > 1$ i $y \ll 1$, wyrażenie (59) można uprościć przez przyjęcie

$$\Theta_1(1-y)-1 \approx \Theta_1 - 1 \quad (60)$$

i znaleźć

$$y = \frac{B}{4} \frac{(\Theta_1^4 - 1)(\Theta_1 - 1)}{\Theta_1^5} p. \quad (61a)$$

Wreszcie, wyrażając B za pomocą (47) i (46) i y przez (54), dochodzimy do wyrażenia

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{\gamma}{2,3\sigma\varrho_0^{1/2}T_0^{1/2}} \frac{\Theta_1 - 1}{\Theta_1^5} p \approx 167 \frac{\gamma}{\varrho_0^{1/2}} \left(\frac{\Theta_1 - 1}{\Theta_1^5} \right) p. \quad (61b)$$

Wyrażenie w nawiasach osiąga maximum wynoszące ok. 0,08 dla $\Theta_1 = 1,25$.

5. UKŁAD MOSTKOWY

Zmiany oporności wywołane zmianami ciśnienia naruszają równowagę mostka (rys. 7). Jeśli

$$R_1 \approx R_2 \approx R_3 \approx R, \quad R = R_1 - \Delta R \quad (62)$$

(przy czym $\Delta R \ll R_1$), to przyrost prądu w galwanometrze o oporności R_g będzie

$$I_g = \frac{I_1}{2 \left(1 + \frac{R_g}{R_1} \right)} \frac{\Delta R}{R_1}. \quad (63)$$

Biorąc pod uwagę równanie (52) znajdujemy z (47)

$$I_1 = (0,576 \sigma u q)^{1/2} \frac{T_0^{3/4}}{\varrho_0^{1/4}} (\Theta_1^4 - 1)^{1/2} \approx 0,65 \frac{(uq)^{1/2}}{\varrho_0^{1/4}} (\Theta_1^4 - 1)^{1/2}. \quad (64)$$

Wprowadzając (61b) i (64) do (63) otrzymujemy

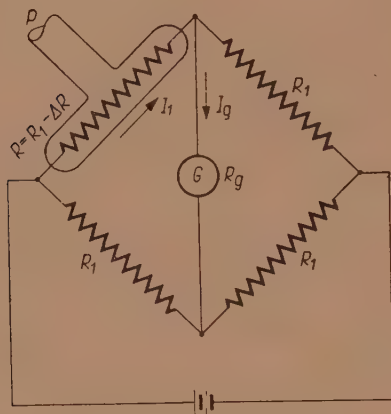
$$I_g = \frac{0,165}{1 + \frac{R_g}{R_1}} \frac{\gamma (uq)^{1/2}}{\sigma^{1/2} \varrho_0^{3/4} T_0^{3/4}} \left[\frac{(\Theta_1 - 1)(\Theta_1^4 - 1)^{1/2}}{\Theta_1^5} \right] p \quad (65a)$$

albo po podstawieniu wartości liczbowych za σ i T_0

$$I_g \approx \frac{50}{1 + \frac{R_g}{R}} \frac{\gamma}{\varrho_0^{3/4}} (uq)^{1/2} \left[\frac{(\Theta_1 - 1)(\Theta_1^4 - 1)^{1/2}}{\Theta_1^5} \right] p. \quad (65b)$$

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych osiąga wartość maksymalną 0,135 dla $\Theta_1 = 1,6$, i wówczas

$$I_g \approx \frac{7,5}{1 + \frac{R_g}{R_1}} \frac{\gamma}{\varrho_0^{3/4}} (uq)^{1/2} p. \quad (66)$$



Rys. 7. Układ mostkowy.

Dla nieustalonego stanu pracy, gdy p się zmienia, należy rozwiązać równanie (58); dzieląc go przez $C\Theta_1$, otrzymujemy

$$\frac{dy}{dt} + my = np \quad (67)$$

gdzie

$$m = \frac{2,3 \sigma \varrho_0^{1/2} T_0^{1/2} r u}{C_H \delta q} \Theta_1^4 \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{\varrho_0^{1/2}}{C_H \delta} \frac{u}{q} \Theta_1^4, \quad (68)$$

$$n = \frac{\gamma r u}{C_H \delta q} \frac{\Theta_1 - 1}{\Theta_1} \approx 0,24 \frac{\gamma}{C_H \delta} \frac{u}{q} \frac{\Theta_1 - 1}{\Theta_1}. \quad (69)$$

Jeśli ciśnienie jest funkcją czasu, a więc $p = p(t)$ rozwiązanie równania (67) ma postać

$$y = \exp(-mt) \left[n \int p(t) \exp(mt) dt + \text{const.} \right] \quad (70)$$

Założmy, że ciśnienie $p(t)$ wzrasta nagle od zera do wartości p_2 , a następnie maleje zgodnie z równaniem (25)

$$p = p_2 \exp(-m_2 t) \quad (71)$$

gdzie

$$m_2 = \frac{G_2}{V_2}. \quad (72)$$

Wprowadzenie równania (71) do (70) i scałkowanie, przy wzięciu pod uwagę warunków początkowych $y=0$ dla $t=0$, prowadzi do rozwiązania

$$y = \frac{n}{m} \frac{1}{1 - \frac{m_2}{m}} [\exp(-m_2 t) - \exp(-m t)] p_2. \quad (73)$$

Z upływem czasu y wzrasta od zera do wartości maksymalnej

$$y_m = \left(\frac{\Delta R}{R_1} \right)_m = \frac{n}{m} \Phi(z) p_2 \quad (74)$$

którą osiąga w momencie

$$t_m = \frac{1}{m} \frac{\ln z}{1 - z}. \quad (75)$$

We wzorach powyższych

$$\Phi(z) = \frac{z}{z-1} \left[\exp\left(-\frac{1}{z-1} \ln z\right) - \exp\left(-\frac{z}{z-1} \ln z\right) \right] \quad (76)$$

oraz

$$z = \frac{m}{m_2} = \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{m_2} \frac{\varrho_0^{1/3}}{C_H \delta} \frac{u}{q} \right) \Theta_1^4 = \eta \Theta_1^4. \quad (77)$$

Wyrażenie $\Phi(Z)$ dąży do 1, gdy z wzrasta do nieskończoności. Wynika zatem z (76) i (77), że przy pracy impulsowej jest pożądane (jeśli m_2 przyjmiemy za stałe), aby C_H , δ i q były możliwie małe, natomiast ϱ_0 , u i T_1 powinny być możliwie duże. W przypadku ustalonego stanu pracy, optymalna temperatura T_1 powinna być rzędu $1,25 T_0$, jak to wynika z równania (61 b).

Wprowadzając (74) i (64) do (63), otrzymujemy

$$I_g = \frac{0,16}{1 + \frac{R_g}{R_1}} \frac{\gamma (uq)^{1/2}}{\varrho_0^{3/4} \sigma^{1/2} T_0^{1/4}} \left[\frac{(\Theta_1^4 - 1)^{1/2} (\Theta_1 - 1)}{\Theta_1^5} \Phi(z) \right] p_2 \quad (78)$$

albo, po podstawieniu wartości liczbowych za σ i T_0 ,

$$I_g \approx \frac{50}{1 + \frac{R_g}{R_1}} \frac{\gamma}{\varrho_0^{1/4}} (uq)^{1/2} \left\{ \left[\frac{(\Theta_1^4 - 1)^{1/2} (\Theta_1 - 1)}{\Theta_1^5} \right] \Phi(z) \right\} p_2. \quad (79)$$

Wzór (79) może być napisany jako

$$I_g = g w \Phi p_2 \quad (80)$$

gdzie

$$g = \frac{50}{1 + \frac{R_g}{R_1}} \frac{\gamma'}{\varrho_0^{3/4}} (uq)^{1/2}, \quad (81)$$

$$w = \frac{(\Theta_1^4 - 1)^{1/2} (\Theta_1 - 1)}{\Theta_1^5} \quad (82)$$

Zależności

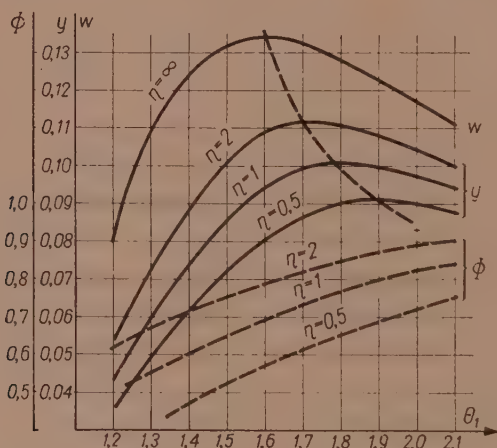
$$w = f(\Theta_1), \quad (83)$$

$$\Phi = f(\Theta_1), \quad (84)$$

oraz

$$y = w \Phi = f(\Theta_1) \quad (85)$$

przedstawiono na rys. 8 z $\eta = 0,5; 1; 2$ jako parametrem. Wynika stąd, że y osiąga wartości maksymalne y_m dla określonych Θ_1 , odpowiadających danym wartościom η , przy czym, zgodnie z (77) η jest funkcją m_2 . Dla $\eta = \infty$, tj. $m_2 = 0$, optymalna temperatura jest dana przez $\Theta_1 = 1,6$, podobnie jak dla ustalonego stanu pracy.



Rys. 8. Zależności y , w i Φ w funkcji Θ_1 .

Ze wzrostem m_2 optymalna temperatura wzrasta, a y_m maleje. Jeśli maksymalna temperatura elementu Θ_1 nie ma przekraczać pewnej wartości, np. 600 °K, tzn. $\Theta_1 \leq 2$, wielkość η nie powinna być mniejsza od 0,5. W tych warunkach, z zależności (77) wynika

$$3 \cdot 10^{-3} \frac{\varrho_0^{1/2}}{C_H \delta} \frac{u}{q} \geq m_2. \quad (86)$$

Dla platyny $\varrho_0 = 10^{-5}$, $C_H = 0,034$, $\delta = 21$ i wzór (86) przybiera postać

$$m_2 \frac{q}{u} \leq 1,3 \cdot 10^{-5}. \quad (87)$$

Jeśli na przykład element oporowy jest wykonany jako wstążka o rozmiarach $2 \cdot 10^{-4} \times 50 \cdot 10^{-4} \times 3$ cm, to $u = 10^{-2}$ cm, $q = 10^{-6}$ cm², a rząd wielkości m_2 będzie 10^{-1} .

Uwzględniając w równaniu (80) wyrażenie (24) oraz maksymalną wartość y_m , zgodnie z (85), napiszemy

$$I_{g_m} = g y_m K_v p_1 \quad (88)$$

gdzie I_{g_m} jest maksymalnym wychyleniem galwanometru podczas odczytu.

Ażeby dać pojęcie o czułości próżniomierza przyjmujemy następujące dane.

Galwanometr (z promieniem świetlnym) o oporności wewnętrznej $R_g = 2000 \Omega$ i wychyleniu 1 mm przy prądzie $1 \cdot 10^{-8}$ A.

Element oporowy ze wstążki platynowej o rozmiarach $2 \mu \times 50 \mu \times 3$ cm w temperaturze $T = 600^\circ \text{K}$ (tj. dla $\Theta_1 = 2$) ma oporność $R_1 \approx 60 \Omega$.

Dla powietrza $\gamma = 10^{-2}$, a przeto

$$g = \frac{50}{1 + \frac{2000}{60}} \frac{10^{-2}}{(10^{-5})^{3/4}} (10^{-2} \cdot 10^{-6})^{1/2} = 0,85 \cdot 10^{-2}.$$

Przyjmując $\eta = 0,2$, znajdujemy z rys. 8 $y_m = 0,09$.

Przy kompresji $K_v = 10^3$ otrzymamy

$$I_{g_m} = 0,85 \cdot 10^{-2} \cdot 0,09 \cdot 10^3 p_1 \approx 0,8 p_1. \quad (89)$$

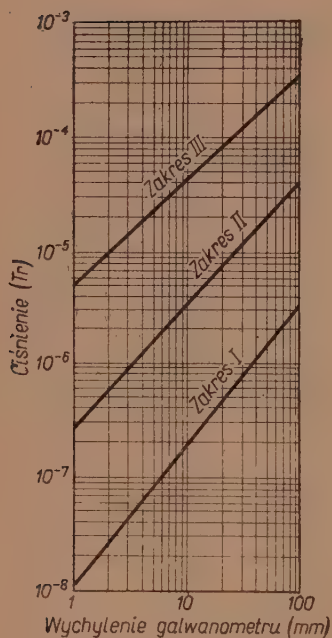
W ten sposób przy ciśnieniu $p_1 = 10^{-7}$ Tr max. prąd w galwanometrze wyniesie $I_{g_m} = 8 \cdot 10^{-8}$ A, czemu odpowiada max. wychylenie 8 mm.

6. KRZYWE SKALOWANIA

Skalowanie próżniomierza cieplno-przewodnościowego o kompresji impulsowej w zakresie bardzo niskich ciśnień napotyka trudności z powodu braku odpowiednich próżniomierzy wzorcowych. Już wstępne zastosowanie nowego próżniomierza jako wskaźnika proporcjonalnego w zakresie $10^{-4} \div 10^{-8}$ Tr wykazało zgodnie z [1], że próżniomierz jonizacyjny w większości przypadków użycia nie może być uważany za przyrząd niezawodny. Jedynie w szczególnie dobranych warunkach można było przeskalować nowy próżniomierz za pomocą próżniomierza joniza-

cyjnego typu Bayarda-Alperta. Otrzymane krzywe skalowania pokazano na rys. 9.

Wygląd zewnętrzny próżniomierza uwidacznia rys. 10.



Rys. 9. Krzywe skalowania próżniomierza.



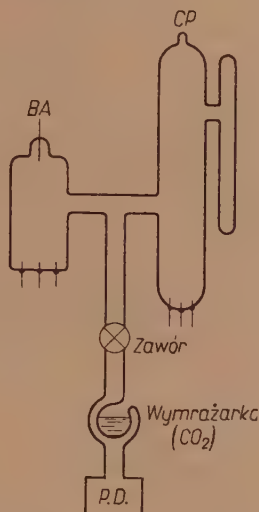
Rys. 10. Wygląd zewnętrzny próżniomierza.

7. PIERWSZE WYNIKI ZASTOSOWANIA

Ażeby dać przykład zastosowania nowego próżniomierza, a równocześnie zwrócić uwagę na zawodność próżniomierzy jonizacyjnych o żarzącej się katodzie, przeprowadzono następujące doświadczenie [7].

Układ próżniowy (rys. 11) składający się z próżniomierza typu Bayarda-Alperta BA (o objętości $V=0,2$ l), próżniomierza cieplnoprzewodnościowego o kompresji impulsowej CP ($V=1,2$ l) i niezbędnych przewodów ($V=0,1$ l) jest połączony — za pośrednictwem zaworu bezsmarowego — z pompą frakcjonującą olejową (25 l/s, Apiezon C). Część wysoko-próżniowa aparatury była pompowana w temperaturze 350°C przez 3 godziny, a głowicę BA odgazowywano według przepisanych w instrukcji warunków przez 30 min, po czym zamknięto zawór; ciśnienie w apa-

raturze było rzędu 10^{-7} Tr. Następnie, mierząc ciśnienie próżniomierzem BA, wprowadzono pewną ilość powietrza i ustabilizowano ciśnienie na wartości ok. $5 \cdot 10^{-5}$ Tr. W ten sposób układ został przygotowany do pompowania jednym z dwóch sposobów.



Rys. 11. Układ do porównywania próżniomierzy.

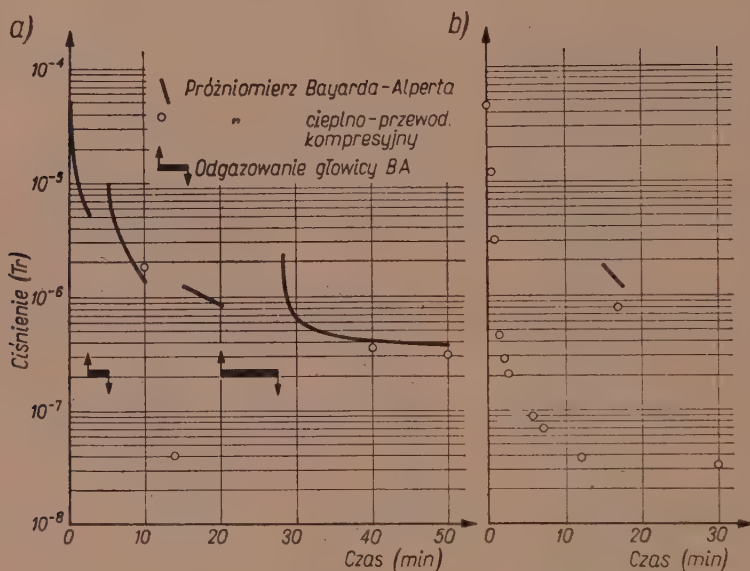
a. Pompowanie przy mierzeniu ciśnienia głowicą BA

Na rys. 12a przedstawiono przebieg pompowania w ciągu 50 min. przy mierzeniu ciśnienia próżniomierzem BA. Linie ciągłe oznaczają odczyty próżniomierza BA, kółka — odczyty próżniomierza CP. Włączanie i wyłączanie próżniomierza BA w celu odgazowywania oznaczono strzałkami ($\uparrow$ — włączenie, $\downarrow$ — wyłączenie); długość poziomej kreski między strzałkami oznacza czas odgazowywania. Z wykresu (rys. 12a) wynika, że po 50 min. pompowania (licząc od chwili otwarcia zaworu do pompy) ciśnienie spadło zaledwie do $3 \cdot 10^{-7}$ Tr.

b. Pompowanie przy nieużywaniu głowicy BA

Ciśnienie w układzie próżniowym — po wpuszczeniu pewnej ilości powietrza — zostało znów ustabilizowane (na podstawie wskazań próżniomierza BA) na wartości $5 \cdot 10^{-5}$ Tr, po czym otworzono zawór (moment 0 — rys. 12b). Obecnie ciśnienie mierzono jedynie za pomocą próżniomierza CP (próżniomierz BA był włączony jedynie na 3 min. w okresie czasu między piętnastą o osiemnastą minutą). Jak to wynika z odczytów próżniomierza CP, ciśnienie po 4 min. pompowania spadło do wartości $3 \cdot 10^{-7}$ Tr, a po 15 minutach — do $3 \cdot 10^{-8}$ Tr. Porównanie obu wykre-

sów (a) i (b) pokazuje, że w większości przypadków w praktyce, gdzie szczególne ostrożności nie są zachowywane, posługiwanie się próżniomierzem BA może utrudnić proces pompowania, przy czym ciśnienie końcowe może nie być dostatecznie niskie. Potwierdza się to na rys. 12a



Rys. 12. Krzywe pompowania: a) przy użyciu próżniomierza Bayarda-Alperta, b) przy użyciu ciepłno-przewodnościowego próżniomierza kompresyjnego.

przez fakt, że już w kilka minut po wyłączeniu głowicy BA (między dziesiątą a piętnastą minutą) ciśnienie w układzie, mierzone za pomocą próżniomierza CP, szybko spada do wartości $4 \cdot 10^{-8}$ Tr. Z drugiej strony, włączenie próżniomierza BA prowadzi do zwiększania ciśnienia, jak to widać na rys. 12b z odczytów obu próżniomierzy (w 16-tej minucie pompowania).

Z powyższego doświadczenia wynika, że w istniejących zazwyczaj warunkach pompowania układów próżniowych o niewielkich objętościach, zaopatrzonych w próżniomierze jonizacyjne z gorącą katodą, wiele czasu traci się na „trenowanie” głowicy, ażeby otrzymać możliwie małą wartość odczytu, za pomocą tego próżniomierza dokonanego. Ponadto próżnia końcowa może nie być tak dobra, jak to miałoby miejsce, gdyby próżniomierz jonizacyjny nie był używany. Otrzymane wyniki potwierdzają spostrzeżenia G. Barnes [1] poczynione w zakresie większych ciśnień.

(Warto zaznaczyć, że wyniki pomiarów były, praktycznie biorąc, niezależne od tego, czy wymrażarka z suchym CO₂ była użyta, czy też nie).

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na zjawisko wydzielania się w próżniomierzu cieplno-przewodnościowym o kompresji impulsowej niewielkich ilości gazów, gdy zachodzi ocieranie się powierzchni tłoka i cylindra podczas przesuwania tłoka [6]. Wymaga to zachowania pewnych ostrożności przy wykonywaniu pomiarów tym próżniomierzem w zakresie najniższych ciśnień¹ (poniżej 10⁻⁷ Tr.).

Autor pragnie wyrazić swą wdzięczność inż. Stanisławowi Dobrzyńskiemu za pomoc przy wykonywaniu doświadczalnych modeli próżniomierza, co wymagało wysokiej precyzji, zručności oraz cierpliwości, oraz p. Wacławowi Wójcikowi, właścicielowi Warsztatu Napraw Sprzętu Medycznego, za życzliwy stosunek i bezinteresowne wykonanie pierwszych prób szlifowania urządzenia kompresyjnego.

Zakład Radiotechniki
Politechniki Warszawskiej

Zakład Elektroniki IPPT — PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Barnes G.: *Erroneous reading of large magnitude in a Bayard-Alpert ionization gauge and their probable cause*. Rev. Sci. Instr. **31**, No 10, 1121 (1960).
2. Bradley R. S.: *A thermistor McLeod Gauge for a pressure range 1—10⁻⁷ mm of mercury*. J. Sci. Instr. **31**, 129, No 4, April (1954).
3. Groszkowski J.: *Le manomètre thermique à compression*. Advances in Vacuum Science and Technology, **1**, 288—9 (1960).
4. Groszkowski J.: *Pulse compression of gas by untight piston*. Bull. Acad. Polon. (Ser. sci. techn.) **8**, No 11—12, 669—72 (1960).
5. Groszkowski J.: *The thermal vacuum gauge in pulse pressure operation*. Bull. Acad. Polon. (Ser. Sci. techn.). **9**, No 1 45—51 (1961).
6. Groszkowski J.: *The sorption of gas at rubbing*. Bull. Acad. Polon. (Ser. sci techn.). **9**, Nr 2 (1961).
7. Groszkowski J.: *Unreliability of ionization gauges and its consequences*, Bull. Acad. Polon. (Sci. Ser. sci techn.). **9**, No 3 (1961).
8. Groszkowski J.: *Pulse-compression thermal vacuum gauge*. Bull. Acad. Polon. (Ser. sci techn.). **9**, No 5 (1961).

ВАКУУММЕТР СОПРОТИВЛЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ СЖАТИЕМ

Диапазон измерения манометра сопротивления может быть расширен до 10⁻⁷ тора благодаря применению сжатия газа, которого давление следует измерить, в объеме маленького сосуда, в котором находится чувствительный реостат-

¹ В новом моделие прѳжнѳмѳрѳзѳ эффект тен знѳчѳтельно змѳнѳеѳзѳно прѳез зѳстѳсѳвание спѳцѳальной кѳнструкѳѳи тѳлка, кѳѳѳѳ запѳевѳнѳя мѳнѳеѳе тарѳѳе поѳверѳхѳнѳи.

ный элемент. Сжатие порядка 10^3 может быть получено при помощи поршня, передвигаемого в цилиндре, соединенном посредством узкого канала с этим маленьким сосудом. Так как при конструкции вакуумметра применяются только высоковакуумные материалы (твердое стекло и небольшое количество тугоплавных металлов) герметичность между поршнем и цилиндром получается при помощи прецизионной шлифовки и полировки соответственных стенок. Если проводимость зазора между поршнем и цилиндром не больше некоторого значения, а скорость передвижения поршня не слишком мала, степень сжатия определяется отношением объема цилиндра к объему маленького сосуда. С другой стороны, если проводимость зазора между дном цилиндра и дном поршня (который закрывает отверстие канала) относительно мала, время удерживания давления после сжатия достаточно для получения установившегося теплового режима в реостатном элементе и для произведения измерения; конечно, тепловая инерция элемента должна быть возможно малой.

Новый вакуумметр свободен от эффектов сорбции и десорбции, которые выступают в ионизационных манометрах, что позволяет наблюдать эти эффекты и выводить интересные заключения относительно действия и точности этих манометров.

В статье даны основы теории и конструкции нового вакуумметра.

PULSE-COMPRESSION THERMAL VACUUM GAUGE

The range of the thermal conductance vacuum gauge can be extended up to 10^{-7} Torr by compressing the gas in a small vessel which contains the thermal element. The compression of the order of 10^3 is obtained by the movement of a piston in the cylinder which communicates from its closed side via a conduit with the small vessel. As no other material, excepting glass and small quantity of vacuum metals can be applied in the construction of the gauge, the tightness between the piston and the cylinder is assured owing to the grounding and polishing the corresponding walls. If the conductance of the gap between the piston and the cylinder walls does not exceed a certain value, and the speed of the piston movement is not too small, the compression degree is determined by the ratio of the volumes of the cylinder and of the small vessel. On the other hand, if the conductance of the gap between the cylinder bottom and piston bottom (which closes the opening of the conduit) is suitably small, the time of maintaining the vessel pressure after the compression is sufficient in order that the thermal process in the element could be established and the measurement could be performed. Besides, the thermal inertia of the elements is made very small.

The gauge is free of the pumping and de-gassing effects which occur in the ionic gauges. Consequently it allows to observe these effects and draw very interesting conclusions with respect to the operation and accuracy of the ionization gauge. The basic theory and design of the new gauge are given in the paper.

658.562:621.38

SZ. FIRKOWICZ

Przyczynę do statystycznej analizy jakości lamp elektronowych

Rękopis dostarczono 6. 2. 1961.

W pracy rozpatrzono jakość lamp jako iloczyn prawdopodobieństwa braku uszkodzeń zupełnych R_a i prawdopodobieństw warunkowych zachowania parametrów elektrycznych w granicach wymaganych tolerancji $R_{x1}, R_{x2}, \dots, R_{xi}$. Dla określenia R_a potrzebna jest znajomość funkcji rozkładu parametru X . W pracy przedstawiono wyniki doświadczalnego sprawdzenia hipotezy, że zmienne S_a i $\lg I_a$ mają rozkład normalny dla dowolnego czasu t_j pracy lamp.

Lampa elektronowa pracuje poprawnie, jeżeli:

- a) nie ma wad uniemożliwiających jej eksploatację (uszkodzeń zupełnych),
- b) wszystkie jej podstawowe parametry elektryczne są w granicach wymaganych tolerancji.

Oceną jakości partii lamp jest prawdopodobieństwo poprawnej ich pracy, otrzymane na podstawie badania próbki losowej reprezentującej daną partię. Oznaczając przez A_0 zdarzenie polegające na braku uszkodzeń zupełnych oraz przez A_i zdarzenie polegające na tym, że parametr X_i jest w granicach wymaganej tolerancji, prawdopodobieństwo poprawnej pracy lamp (R) określone będzie relacją:

$$R = P(A_0) \cdot P(A_1/A_0) \cdot P(A_2/A_0, A_1) \cdot \dots \cdot P(A_i/A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}) \quad (1)$$

gdzie:

R — prawdopodobieństwo poprawnej pracy lamp,

$P(A_0)$ — prawdopodobieństwo zdarzenia A_0 ,

$R(A_1/A_0)$ — prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A_1 pod warunkiem A_0 ,

$P(A_i/A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1})$ — prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A_i pod warunkiem, że zdarzenia $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ zaszły.

Zakładając, że zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i$ są niezależne, mamy:

$$P(A_2/A_0, A_1) = P(A_2/A_0) \quad (2)$$

$$\text{oraz} \quad P(A_i/A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}) = P(A_i/A_0). \quad (2a)$$

Wówczas wzór (1) przyjmie postać

$$R = P(A_0) \prod_{i=1}^r P(A_i/A_0) \quad (3)$$

gdzie r oznacza liczbę badanych parametrów.

Prawdopodobieństwo $P(A_0)$ nazwiemy niezawodnością awaryjną i oznaczmy przez R_a . Prawdopodobieństwo $P(A_i/A_0)$ nazwiemy niezawodnością parametryczną ze względu na parametr X_i i oznaczmy przez R_{X_i} . Relację (3) można wówczas zapisać w postaci:

$$R = R_a \prod_{i=1}^r R_{X_i}. \quad (4)$$

Wartości R_a i R_{X_i} , a zatem również R zależne są od czasu pracy lamp (t) oraz od warunków ich pracy i pomiarów (κ). Dla danych warunków pracy i pomiarów lamp (κ) dla czasu pracy t_j wzór (4) przyjmie postać:

$$R(t_j) = R_a(t_j) \prod_{i=1}^r R_{X_i}(t_j). \quad (5)$$

Uproszczenie (2) można również stosować, gdy X_1 i X_2 są skorelowane, ale korelacja ich jest słaba, (np. nachylenie charakterystyki S_a i prąd anodowy I_a).

Niezawodność parametryczna ze względu na parametr X określona jest relacją

$$R_{X(t_j)} = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} f(X(t_j)/A_0) dX(t_j) \quad (6)$$

gdzie:

$X(t_j)$ — wartość badanego parametru X po czasie pracy lamp t_j ,
 $f(X(t_j)/A_0)$ — funkcja gęstości rozkładu wartości parametru X po czasie pracy lamp t_j , po wyeliminowaniu uszkodzeń zupełnych,

$X_{\min}, X_{\max}$ — granice wymaganej tolerancji wartości parametru X .

Dla oceny wartości $R_{X(t_j)}$ konieczna jest więc znajomość rozkładu wartości badanego parametru X po czasie pracy lamp t_j .

Podstawowymi parametrami lamp, szczególnie lamp wzmacniających, są: prąd anodowy (I_a) i nachylenie charakterystyki (S_a). Istnieją przesłanki, aby przypuszczać, że zmienne $S_a(t_j)$ i $\lg I_a(t_j)$ mają rozkład normalny. Celem sprawdzenia tych przypuszczeń przeprowadzono niżej omówione doświadczenie.

Próbkę lamp EF80 o liczności $n=103$ szt. poddano pracy próbnej na ramie trwałości, zachowując normalne warunki ich pracy. Po czasie pracy

t_j mierzono wartości S_a i I_a dla każdej lampy w próbie. Celem uzyskania większego rozrzutu wartości $S_{a(t_j)}$ i $I_{a(t_j)}$, pomiary wykonano przy stałej polaryzacji siatki sterującej.

Jako zmienne losowe dla analizy statystycznej przyjęto wartości $S_{a(t_j)}$ oraz $\lg I_{a(t_j)}$. Hipotezy o normalnym rozkładzie tych zmiennych w chwili t_j sprawdzono testem χ^2 Pearsona.

Dla każdego czasu pracy lamp t_j otrzymane wartości $S_{a(t_j)}$ i $\lg I_{a(t_j)}$ podzielono na przedziały i dla każdej ze zmiennych obliczono statystykę χ^2 Pearsona wg relacji

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - n_{(t_j)} \pi_i)^2}{n_{(t_j)} \pi_i}, \quad (7)$$

gdzie:

- r — liczba przedziałów (przyjęto zasadę $r \geq 5$),
- n_i — liczba obserwacji w i -tym przedziale wartości (przyjęto zasadę $n_i \geq 9$),
- $n_{(t_j)}$ — licznosc próbek po wyeliminowaniu uszkodzeń zupełnych,
- π_i — prawdopodobieństwo wynikające z założonego rozkładu normalnego, że badana zmienna losowa zawarta będzie w granicach i -tego przedziału.

Wartości π_i określono na podstawie obliczonych estymatorów wartości średniej i odchylenia średniego badanej zmiennej losowej w chwili t_j .

Zaprzeczeniem hipotezy o rozkładzie normalnym badanej zmiennej losowej, stanowiącym podstawę jej odrzucenia, jest spełnienie warunku

$$\chi^2 > \chi_{\alpha, k}^2, \quad (8)$$

gdzie $\chi_{\alpha, k}^2$ jest zmienną rozkładu χ^2 , spełniającą przy $k = r - 3$ stopniach swobody równanie

$$P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2) = \alpha, \quad (9)$$

gdzie α jest przyjętym poziomem istotności¹.

Otrzymane na podstawie pomiarów i obliczeń wyniki zestawiono w tab. 1. dla $S_{a(t_j)}$ oraz w tab. 2. dla $\lg I_{a(t_j)}$. Z porównania otrzymanych wg (7) wartości χ^2 z wartościami $\chi_{\alpha, k}^2$ dla $\alpha = 5\%$ odczytanymi z tablic widać, że dla wszystkich t_j jest $\chi^2 < \chi_{\alpha, k}^2$, zarówno dla $S_{a(t_j)}$ jak i dla $\lg I_{a(t_j)}$. Warunek (8) nie jest zatem spełniony i można przyjąć, że dla wszystkich t_j prąd anodowy ma rozkład logarytmnormalny, podczas gdy nachylenie charakterystyki ma rozkład normalny.

¹ Wartości $\chi_{\alpha, k}^2$ spełniające równanie (9) są tabelowane, np. [1], [2], [3]. Zazwyczaj przyjmuje się $\alpha = 5\%$.

Tablica 1

Wyniki sprawdzenia hipotezy o rozkładzie normalnym S_a po czasie pracy lamp t_j w warunkach normalnych

t_j godz.	$n(t_j)$ szt.	r	k	χ^2 wg wz. (7)	$\chi^2_{\alpha, k}$ dla $\alpha=5\%$
0	103	8	5	5,71	11,070
52	103	7	4	3,78	9,488
100	100	7	4	6,90	9,488
150	100	6	3	3,53	7,815
199	99	6	3	5,97	7,815
320	99	6	3	2,01	7,815
443	99	5	2	0,50	5,991
560	99	6	3	7,33	7,815
675	99	6	3	4,44	7,815
800	99	6	3	7,01	7,815
915	99	7	4	7,14	9,488
966	99	7	4	4,70	9,488

Tablica 2

Wyniki sprawdzenia hipotezy o rozkładzie normalnym $\lg I_a$ po czasie pracy t_j w warunkach normalnych

t_j godz.	$n(t_j)$ szt.	r	k	χ^2 wg wz. (7)	$\chi^2_{\alpha, k}$ dla $\alpha=5\%$
0	103	7	4	4,69	9,488
52	103	7	4	7,52	9,488
100	100	7	4	7,93	9,488
150	100	6	3	4,37	7,815
199	99	6	3	5,54	7,815
320	99	7	4	6,71	9,488
443	99	7	4	3,29	9,488
560	99	6	3	6,01	7,815
675	99	6	3	4,59	7,815
800	99	6	3	4,17	7,815
915	99	5	2	5,60	5,991
966	99	5	2	5,16	5,991

Dla upewnienia się sprawdzono rozkład $S_{a(t_j)}$ dla kilku wartości t_j dla innej próbki losowej lamp EF80, pracującej w warunkach zaostrowanych. Zaostrowanie to polegało na podwyższeniu napięcia anodowego podczas pracy lamp ze 170 V na 250 V, przez co zwiększona została moc wydzielana w anodzie. Pomiar wartości $S_{a(t_j)}$ wykonywano w warunkach normalnych, przy automatycznej polaryzacji siatki sterującej.

Tablica 3

Wyniki sprawdzenia hipotezy o rozkładzie normalnym S_a po czasie pracy t_j
w warunkach obostrzonych

t_j godz.	$n(t_j)$ szt.	r	k	χ^2 wg wz. (7)	$\chi^2_{\alpha, k}$ dla $\alpha=5\%$
25	103	6	3	7,75	7,815
100	102	5	2	4,59	5,991
150	101	5	2	3,23	5,991
200	101	5	2	5,77	5,991
300	92	5	2	5,59	5,991
900	91	5	2	5,05	5,991
1050	91	5	2	4,11	5,991

Otrzymane wyniki podano w tab. 3. Również w tym przypadku nie otrzymano zaprzeczenia hipotezy o rozkładzie normalnym zmiennej $S_{a(t_j)}$ po czasie pracy lamp t_j .

Przemysłowy Instytut Elektroniki

WYKAZ LITERATURY

1. Fisz M.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN, Warszawa 1958.
2. Smirnow N. W., Dunin-Barkowski I. W.: *Kratkij kurs matematičeskoj statistiki dla tiehničeskich priłoženij*. Fizmatgiz, Moskwa 1959.
3. Van der Waerden B. L.: *Mathematische Statistik*. Berlin 1957; tłum. ros. pod red. I. W. Smirnowa, Moskwa 1960.

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРОННЫХ ЛАМП

В работе рассмотрено качество ламп как произведение вероятности отсутствия полных повреждений (R_a) и условных вероятностей сохранения электрических параметров в пределах допуска ($R_{X_1}, R_{X_2} \dots R_{X_i}$). Для определения этого необходимо знать функцию распределения параметра X . В работе поданы результаты экспериментальной проверки гипотезы, что переменные S_a и $\lg I_a$ имеют нормальное распределение для любого времени t_j работы ламп.

CONTRIBUTION TO THE STATISTICAL ANALYSIS OF THE QUALITY OF ELECTRON TUBES

The quality of the electron tubes is considered as product of probability of lack of damage (R_a) and conditional probabilities of keeping the electrical parameters, within the required tolerance limits ($R_{X_1}, R_{X_2} \dots R_{X_i}$). To determine R_X the knowledge of distribution function of parameter X is necessary.

The experimental results of checking the hypothesis that random variables S_a and $\lg I_a$ have normal distribution for an arbitrary operation time t_j of electron tubes are presented.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Komunikaty z prac

Zakładu Elektroniki przy współpracy z Katedrą Podstaw Telekomunikacji
Politechniki Warszawskiej

621.318.12

R. WADAS

MONOKRYSTAŁY FERRYTU ITROWEGO I NIKLOWEGO

Rękopis dostarczono 10. 3. 1961.

W pracy opisano sposób otrzymywania monokryształów ferrytu itrowego i niklowego.

МОНОКРИСТАЛЛЫ ИТРИЕВОГО И НИКЕЛЕВОГО ФЕРРИТА

В статье описан метод получения кристаллов итриевого и никелевого феррита. Приведены фотографии этих ферритов.

YTTRIUM AND NICKEL FERRITE SINGLE CRYSTALS

In the article a method of producing yttrium and nickel ferrite single crystals is described. Photographs of these ferrites are given.

1. WSTĘP

Materiały magnetyczne, ze względu na swoją budowę krystaliczną mają własności anizotropowe. W polikryształach jednak, dzięki dowolnemu rozkładowi poszczególnych krystalitów, własności anizotropowe nie ujawniają się. Aby móc więc zdefiniować materiał należy wytworzyć materiał monokryształiczny. Takie zadanie postawiono sobie w tej pracy i dotyczyło ono ferrytów. Przedmiotem badań były ferryty o strukturze granatu i strukturze spinelowej.

2. FERRYT ITROWY O STRUKTURZE GRANATU

Ferryt itrowy o wzorze $Y_3Fe_5O_{12}$ posiada strukturę granatu [4]. Cechą tego typu ferrytu jest bardzo duża regularność budowy krystalicznej i rozkładu poszczególnych jonów w określonych położeniach sieci. Tym właśnie wyodrę-

biają się ferryty o strukturze granatu od ferrytów o strukturze spinelowej. Ma to swoje odbicie we własnościach magnetycznych, które w sposób zasadniczy wyróżniają ferryty o strukturze granatu od ferrytów o strukturze spinelowej.

Monokryształy ferrytu itrowego otrzymano w oparciu o metodę opisaną przez Nielsena i Deaborna [1] [2] oraz Tiotową [3].

Czystość użytych do wytworzenia monokryształów trójtlenków Y_2O_3 i Fe_2O_3 była większa od 99,5%. Największe monokryształy otrzymano dla stosunku molowego $a \cdot Y_2O_3 : b \cdot Fe_2O_3 = 3,5 : 44$. Trójtlenki Y_2O_3 i Fe_2O_3 mieszano z tlenkiem PbO i kwasem ortoborowym tak, aby zapewnić ich wzajemny stosunek molowy wg zależności $(a \cdot Y_2O_3 + b \cdot Fe_2O_3) : c \cdot PbO : d \cdot B_2O_3 = 47,5 : 46,5 : 6$.

W celu dokładnego zmieszania i zmniejszenia ziarnistości wymienionych związków, mielono je w mójdzieżu agatowym przez 2 godz. Rozpuszczano je w tyglu platynowym o pojemności 40 ml. Jest to pojemność bardzo mała. W pracach [1] [2] [3] autorzy z naciskiem podkreślają, że wielkość monokryształów zależy bardzo silnie od pojemności tygla. Stosowane przez nich tygle miały najmniejszą pojemność 100 ml. Jednakże kilkumilimetrowe monokryształy jakie otrzymano w tej pracy są aż za duże (trzeba je zmniejszać) do określenia stałej anizotropii, spektroskopowego współczynnika rozszczepienia, szerokości krzywej rezonansowej i innych stałych materiałowych. Temperatura w jakiej rozpuszczano mieszane związki wynosiła 1340°C . Czas przetrzymania w tej temperaturze — 4 godz. Bardzo ujemnym zjawiskiem, jakie ma miejsce przy topieniu związków użytych w tych doświadczeniach, jest ich wypryskiwanie z tygla platynowego. Możliwa jest wówczas zmiana wzajemnych stosunków trójtlenków i tlenków. Aby ograniczyć to w jak największym stopniu przykrywano tygiel platynową przykrywką, przymocowując ją drutem również platynowym oraz podnoszono temperaturę stosunkowo szybko z szybkością 350°C na godzinę.

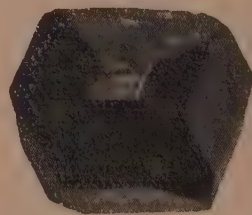
Warunkiem wykrystalizowania monokryształów z rozpuszczonych związków jest bardzo powolne obniżanie temperatury. W przeprowadzonych doświadczeniach szybkość studzenia wynosiła 2°C na godzinę od temperatury 1340°C do 950°C .

Poniżej 950°C rozrost monokryształów jest znikomy. Od temperatury 950°C do 20°C studzenie wytworzonych związków odbywa się razem z piecami. Gwałtowne studzenie nie jest wskazane ze względu na wprowadzanie naprężeń.

Otrzymana mieszanina związków jest twardym stopem. Rozpuszcza się go przez kilka (do 16) godzin w pięćdzie-

sięcioprocentowym roztworze kwasu azotowego. Po rozpuszczeniu i wielokrotnym przemyciu wodą destylowaną mieszaninę suszy się. W uzyskiwanej w ten sposób mieszaninie widać zupełnie wyraźnie dwa rodzaje monokryształów. Monokryształy $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ z charakterystyczną sobie formą kryształów oraz monokryształy $\text{PbFe}_{12}\text{O}_{19}$ w postaci dużych, kruchych blaszek. Przy pewnej, zresztą niewielkiej wprawie, monokryształy te można oddzielić wizualnie. W celu jednakże rozdzielenia wszelkich wątpliwości podgrzewa się wszystkie wybrane monokryształy do temperatury $340^{\circ}\text{C} \div 350^{\circ}\text{C}$ i niewielkim magnesem wyciąga monokryształy $\text{PbFe}_{12}\text{O}_{19}$, których temperatura Curie $T_c = 360^{\circ}\text{C}$, (temperatura Curie ferrytu itrowego $T_c = 275^{\circ}\text{C}$). Aby oddzielić następnie monokryształy $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ od znajdujących się innych związków pozostałość studzono do 250°C i wydobywano magnesem monokryształy ferrytu itrowego.

Otrzymane w ten sposób monokryształy ferrytu itrowego przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

3. MONOKRYSZTAŁY NiFe_2O_4 O STRUKTURZE SPINELOWEJ

Metoda otrzymywania monokryształów ferrytu niklowego jest analogiczna do opisanej poprzednio. Inny jednakże zastosowano stosunek rozpuszczonych składników. Ferryt niklowy lub ściślej tlenki, z których on powstaje rozpuszczano w PbO . Wzajemny stosunek

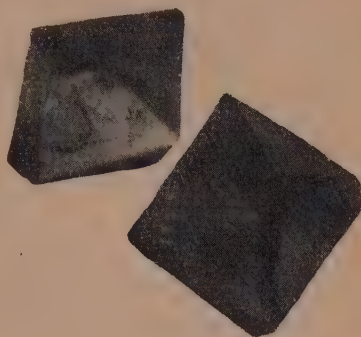
molowy poszczególnych składników $\text{NiO} : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{PbO}$ wynosił 1:1:2,78 odpowiednio.

Wyżej wymienione tlenki rozpuszczano w tyglu platynowym o pojemności 40 ml w 1300°C przez 1 godz. Szybkość studzenia wynosiła 4°C na godz. Przy szybkości studzenia 8°C na godzinę wielkość monokryształów w naszych warunkach nie przekraczała 1 mm. Były one jednocześnie porowate i zawierały ziarna nie będące monokryształami. Natomiast przy szybkości studzenia $4^\circ\text{C}/\text{godz.}$ wielkość monokryształów wynosiła $3 \div 4$ mm. Monokryształy ferrytu niklowego oddziela się od pozostałych związków analogicznie jak poprzednio za pomocą pięćdziesięcioprocentowego roztworu wodnego kwasu azotowego.

Kształt otrzymanych monokryształów przedstawiono na rys. 2. Jest to dwupiramida tetragonalna. Płaszczyznami łatwego wzrostu są płaszczyzny (112).

W celu zbadania anizotropowych właściwości ferrytów należy możliwie jak najdokładniej ustalić płaszczyzny, w których dokonywać się będzie pomiary.

Osią łatwego magnesowania ferrytów magnetycznie miękkich jest oś [111], natomiast trudnego [001] i [110]. Naj-



Rys. 2

bardziej więc interesującą będzie płaszczyzna (110). Jej określenie jest przedmiotem następnego artykułu.

WYKAZ LITERATURY

1. Nielsen J. W., Dearborn E. F.: J. Phys. Chem. Solids V 5, 1958, 202
2. Nielsen J. W.: Journ. Appl. Phys. V 29, 1958, 390
3. Titowa A. G.: Fizika twierdowo ciała, t. I, 1959, 1871.
4. Wadas R.: Przegl. Telekom. Nr 4, 1959, 93.

621.318.12

J. SASS

BADANIE RENTGENOGRAFICZNE FERRYTU ITROWEGO O STRUKTURZE GRANATU

Rękopis dostarczono 10. 3. 1961.

Określono typ i wymiar komórki sieciowej ferrytu itrowego, grupę translacyjną i grupę dyfrakcyjną Lauego. Wyznaczono wartość periodu identyczności.

РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИТРИЕВОГО ФЕРРИТА В СТРУКТУРЕ ГРАНАТА

Определен тип и размер элементарной ячейки итриевого феррита, трансляционная группа и дифракционная группа Лауа. Определено значение периода повторяемости.

ROENTGENOGRAPHIC INVESTIGATION OF THE YTTRIUM-IRON GARNET

Type and size of unit cell of the yttrium ferrite, translation group and lane diffraction group are defined. Value of the identity period is determined.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy określono i przedyskutowano rodzaj i wymiar komórki sieciowej, grupę translacyjną oraz grupę dyfrakcyjną Lauego.

Szczególną uwagę zwrócono na precyzyjne wyznaczanie periodu identyczności komórki sieciowej. Obiektem badań były monokryształy ferrytu itrowego, których sposób otrzymania był tematem publikacji [7].

2. OZNACZANIE RODZAJU I WYMIARU KOMÓRKI SIECIOWEJ

Typ i stałe sieciowe komórki wyznacza się w metodzie obracanego kryształu lub metodą proszkową Debey'a—

ferencji, z uwagi na możliwość występowania w jednej pozycji kątowej na debajogramie interferencji pochodzących od kilku różnych płaszczyzn sieciowych, dla których zachodzi:

$$h_1^2 + k_1^2 + l_1^2 = h_2^2 + k_2^2 + l_2^2 = \dots = h_n^2 + k_n^2 + l_n^2.$$

Okoliczność ta dyskwalifikuje użyteczność metody proszkowej do analizy wygaszeń pasowych i seryjnych przy określaniu grupy przestrzennej. Spośród dwóch wymienionych metod prowadzących do oznaczenia rodzaju i wymiaru komórki sieciowej wybrano metodę Debey'a—Scherrera—Hulla.

Debajogram (rys. 1) wykonano w kamery cylindrycznej o $\phi = 57,3$ mm przy



Rys. 1

Scherrera—Hulla. Pierwsza z metod staje się nieodzowna w przypadku określania struktur układów niskosymetrycznych. Jeśli natomiast chodzi o układ regularny gdzie nie zachodzi obawa o wieloznaczność wskaźnikowania, wygodniejszą jest metoda proszkowa.

Jej zalety w stosunku do metody obracanego kryształu to przede wszystkim:

- a) większa dokładność przy wyznaczaniu odległości międzypłaszczyznowych d
- b) dokładniejszy i łatwiejszy pomiar natężenia promieni interferencyjnych
- c) możliwość uzyskania z jednego diagramu wszystkich parametrów koniecznych do obliczania periodu identyczności.

Wadą jest niezupełnie szczegółowe zestawienie całokształtu uzyskanych inter-

użyciu kolimatora o przekroju kołowym $\phi = 0,5$ mm na filtrowanym promieniowaniu Co (CoK_α).

Napięcie anodowe lampy rtg. $u = 35$ kV

Prąd lampy $i = 8$ mA

Czas ekspozycji $t = 8$ godz.

Preparatem był sproszkowany monokryształ ferrytu itrowego w kształcie walca o przekroju $\phi = 0,25$ mm.

Dokładność centrowania preparatu w osi kamery $\leq \pm 0,05$ mm. Zdjęcie wykonano w asymetrycznym ułożeniu filmu względem wiązki promienia pierwotnego (Straumanis—Jewins), umożliwiając wyznaczenie efektywnego promienia kamery Ref. (tabl. I).

Pozycje symetrycznych interferencji na rentgenogramie określano na mikrofotometrze z dokładnością $\leq \pm 0,1$ mm, wobec tego pomiar odstępów między symetrycznymi interferencjami był obar-

Tablica 1

L. p.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	x	$y_{1,2}$	$x + y_{1,2}$	$x - y_1$ $y_2 - x$	θ'	$\theta = \alpha \cdot \theta'$	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} [\text{\AA}]$	$h^2 + k^2 + l^2$	(h, k, l)	$\frac{\Delta d}{d} [\%]$	$a [\text{\AA}]$
1	102.2	81.6	183.8	20.6	10.3	10.3	5.0025	6	1, 1, 2	0.96	12.2561
2	107.7	76.1	183.8	31.6	15.8	15.8	3.2847	14	2, 1, 3	0.62	12.2913 *
3	8	8	8	33.8	18.9	18.9	3.076	16	0, 0, 4	0.58	12.3040 *
4	110.9	72.9	183.8	38.0	19.0	19.0	2.7471	20	2, 2, 4	0.50	12.2850
5	112.7	71.0	183.7	41.7	20.8	20.8	2.5188	24	2, 2, 4	0.46	12.3396
6	113.6	70.2	183.8	43.4	21.7	21.7	2.4194	26	0, 1, 5; 3, 1, 4	0.44	12.3865
7	116.3	68.4	184.7	47.9	23.4	23.5	2.2434	30	5, 2, 1	0.40	12.2871
8	116.1	67.7	183.8	48.4	24.2	24.3	2.1736	32	6, 1, 1; 5, 3, 2	0.39	12.2960
9	118.4	65.2	183.6	53.2	26.6	26.7	1.9908	38	4, 4, 0	0.35	12.2713
10	122.0	61.7	183.7	60.3	30.1	30.2	1.7782	48	4, 4, 4	0.30	12.3184
11	123.3	60.3	183.6	63.0	31.5	31.6	1.7070	52	6, 4, 0	0.28	12.3091
12	124.0	59.7	183.7	64.3	32.1	32.2	1.6785	54	7, 2, 1; 6, 3, 3; 5, 5, 2	0.28	12.3336
13	124.7	59.0	183.7	65.7	32.8	32.9	1.6468	56	6, 4, 2; 6, 5, 1	0.27	12.3215
14	126.8	57.0	183.8	69.8	34.9	35.0	1.5594	62	7, 3, 2; 6, 5, 1	0.25	12.2787 *
15	127.2	56.4	183.6	70.8	35.4	35.5	1.5403	64	8, 0, 0	0.24	12.3224
16	132.1	51.6	183.7	80.5	40.2	40.3	1.3829	80	8, 4, 2	0.20	12.3686
17	133.3	50.3	183.6	83.0	41.5	41.6	1.3473	84	8, 4, 0	0.20	12.3480
18	134.0	49.7	183.7	84.3	42.1	42.2	1.3316	86	9, 2, 1; 7, 6, 1; 6, 5, 5	0.19	12.3492 *
19	134.7	49.0	183.7	85.7	42.8	42.9	1.3140	88	6, 6, 4	0.19	12.3266
20	136.3	226.9	363.2	90.6	45.3	45.4	1.2737	94	9, 3, 2; 7, 6, 3;	0.18	12.3485
21	137.6	225.6	363.2	88.0	44.0	44.1	1.2456	98	9, 4, 1; 8, 5, 3	0.17	12.3802
22	139.4	223.9	363.3	84.5	42.2	42.3	1.2094	104	10, 2, 0; 8, 6, 2	0.16	12.3358
23	141.1	222.0	363.1	80.9	40.4	40.5	1.1762	110	10, 3, 1	0.15	12.3501
24	143.0	220.2	363.2	77.2	38.6	38.7	1.1461	116	10, 4, 0; 8, 6, 4	0.14	12.3549
25	143.4	219.6	363.0	76.2	38.1	38.2	1.1381	118	10, 3, 3	0.14	12.3711
26	144.2	219.0	363.2	74.8	37.4	37.5	1.1274	120	10, 4, 2	0.13	12.3563
27	146.0	217.2	363.2	71.2	35.6	35.7	1.1014	126	10, 5, 1	0.13	12.3577
28	146.7	216.5	363.2	69.8	34.9	35.0	1.0919	128	11, 3, 2; 10, 5, 3	0.12	12.3494
29	148.6	214.7	363.3	66.1	33.0	33.1	1.0677	134	12, 0, 0; 8, 8, 4	0.11	12.3640 *
30	149.2	214.0	363.2	64.8	32.4	32.5	1.0605	136	12, 2, 0	0.10	12.3760 *
31	152.0	211.2	363.2	59.2	29.7	29.8	1.0285	144	10, 5, 5	0.09	12.3809
32	153.3	210.0	363.3	56.7	28.3	28.4	1.0169	148	12, 2, 2; 10, 6, 4	0.09	12.3656
33	154.0	209.1	363.1	55.1	27.5	27.6	1.00297	150	11, 6, 1	0.08	12.3755 *
34	154.8	208.4	363.2	53.6	26.8	26.9	0.98453	152	11, 6, 3; 9, 9, 2; 9, 7, 6	0.07	12.3686
35	157.0	206.2	363.2	49.2	24.6	24.7	0.96002	168	13, 2, 1	0.05	12.3705
36	160.3	202.9	363.2	42.6	21.3	21.3	0.93783	174	12, 4, 4	0.05	12.3692
37	164.1	199.1	363.2	35.0	17.5	17.5	0.93240	176	12, 6, 0; 10, 8, 4	0.04	12.3722
38	165.2	198.0	363.2	32.8	16.4	16.4	0.92221	180	10, 9, 1	0.04	12.3690
39	167.4	195.7	363.1	28.3	14.1	14.1	0.91691	182	12, 6, 2	0.03	12.3782
40	168.8	194.3	363.1	25.5	12.7	12.7	0.91214	184			
41	170.2	192.9	363.1	22.7	11.3	11.3					

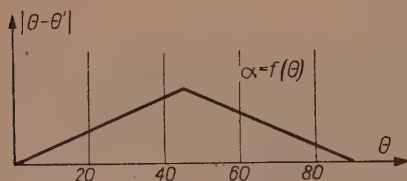
 $\lambda C, K_{\alpha} = 1.78892 \text{ \AA}$

*) interferencja o małej intensywności

czony błędem nie większym niż $\pm 0,2$ mm. Odstęp między symetrycznymi interferencjami określono jako odległość od maksimum do maksimum zaczernienia symetrycznych linii na rentgenogramie.

W 6. kolumnie (tabl. 1) zamieszczono wartości kątów braggowskich z poprawką uwzględniającą systematyczny uchyb wynikający z nierówności: $\text{Ref} \neq R = 28,65$ mm. Z kolumny 3 (tabl. 1)

wynika $\frac{R}{\text{Ref}} = a = 1,0022$. Uchyb powyższy przyczynia się w zakresie od $0 - 45^\circ$ do zmniejszenia $\angle$ braggowskiego, od $45^\circ - 90^\circ$ powoduje zwiększenie $\angle$ braggowskiego. Wartość poprawki w funkcji $\angle$ braggowskiego ilustruje rys. 2.



Rys. 2

Uwzględnienie systematycznego uchybu spowodowanego pochłanianiem w preparacie (poprawka Haddinga) okazało się zbędnym z uwagi na małą średnicę preparatu $\phi = 0,25$ mm i niski współczynnik pochłaniania preparatu (masowy współcz. absorpcji preparatu $\frac{\mu}{\rho} \approx 73$). Przed przystąpieniem do wskaz-

nikowania, określono dokładność pomiaru odległości międzypłaszczyznowych d w funkcji $\angle$ braggowskiego.

Błąd ten dla metody proszkowej oblicza się z zależności

$$\frac{\Delta d}{d} \leq \text{ctg } \theta \frac{1}{4R} \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta R}{R} \right) \quad (1)$$

$\frac{\Delta R}{R}$ można pominąć względem $\frac{\Delta l}{l} = 0,2$.

Dokładność pomiaru odległości międzypłaszczyznowych w % w funkcji $\angle$ braggowskiego podano w kolumnie 10

(tabl. 1). W ten sposób kryterium właściwego doboru wskaźników zawiera się w spełnieniu równości

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}}{\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}$$

z dokładnością określoną równaniem

Warunek ten spełniony jest w zakresie od $60 - 90^\circ$ $\angle$ braggowskiego, poniżej 60° obserwuje się pewną niedokładność spowodowaną wzrastającym udziałem systematycznego uchybu wynikającego z pochłaniania w preparacie.

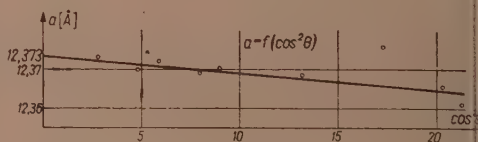
Jak wynika z kolumny 9 (tabl. 1) wszystkie interferencje przyporządkowano ferrytowi itrowemu krystalizującemu w układzie regularnym. Dokładną wartość periodu identyczności ferrytowego wyznaczono z interferencji wstecznych zawartych w przedziale $62,4^\circ - 78,7^\circ$ $\angle$ braggowskiego.

Ostateczną wartość periodu identyczności wyznaczono z ekstrapolacji

$$a = f(\cos^2 \theta)$$

(Bradley—Jay) do $\theta = 90^\circ$ $\angle$ braggowskiego (rys. 3) uzyskany w ten sposób period identyczności ma wartość

$$a = 12,373 \pm 0,004 \text{ \AA}$$



Rys. 3

W tabelcy 2 podano dla porównania rezultaty otrzymane przez innych autorów

Tabela 2

a [Å]	autor	rok
12,36	F. Bertaut	1956 [1]
$12,360 \pm 0,007$	C. L. Hogan	1958 [4]
12,37	H. Sekizawa	1958 [6]
$12,376 \pm 0,004$	M. A. Gillico	1958 [3]
$12,379 \pm 0,004$	J. J. Rovley	1958 [5]

3. OZNACZENIE GRUPY TRANSLACYJNEJ

Ogólna metoda oznaczania grupy translacyjnej polega na analizie wszystkich obserwowanych i wyśkaźnikowanych interferencji. Poszczególne grupy translacyjne powodują pewne charakterystyczne wygaszania, które mają charakter ogólny, tzn. odnoszą się do wszystkich płaszczyzn sieciowych.

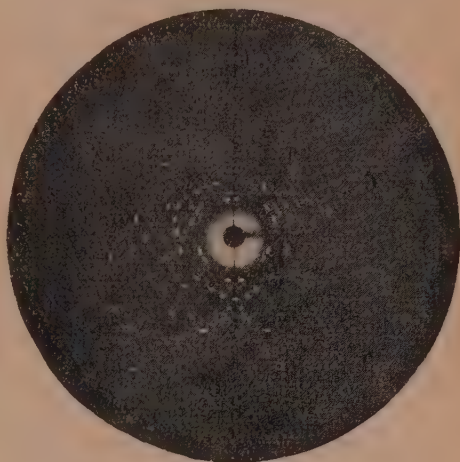
Na rentgenogramie ferrytu itrowego (tabl. 1, rys. 1) występują tylko interferencje, dla których suma wskaźników Millera jest liczbą parzystą ($h+k+l=2n$, $n=1, 2, 3, \dots$). Stąd wniosek, że kryształ ferrytu itrowego ma grupę translacyjną przestrzennie centrowaną oznaczoną symbolem I.

4. OZNACZENIE GRUPY DYFRAKCYJNEJ LAUEGO

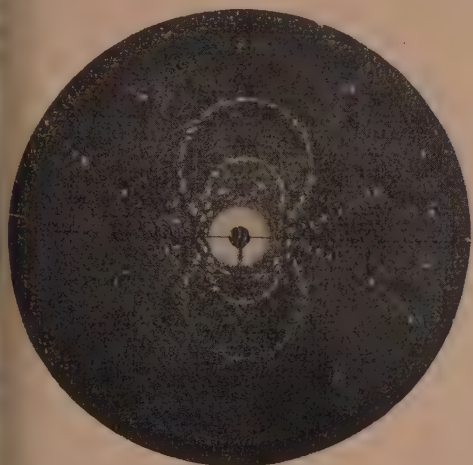
Grupę dyfrakcyjną ferrytu itrowego wyznaczono w oparciu o sporządzone lauegramy. Prześwietlono, w tym celu

dyfrakcyjnej O_h-m3m , której podporządkowane są 3 klasy krystalograficzne: T_d-43m , $O-432$, O_h-m3m .

Bertaut i Forrat [1] wyznaczył grupę przestrzenną ferrytu itrowego ($O_h^{10}-Ja\ 3d$ typ—H 31) i wykazał, że jego



Rys. 5



Rys. 4



Rys. 6

monokryształ w kierunku dwukrotnej (rys. 4), trzykrotnej (rys. 5) i czterokrotnej (rys. 6) osi symetrii. Z symetrii użytych lauegramów wynika, że struktura ferrytu itrowego należy do klasy

postać strukturalna jest izomorficzna z grossulem $Ca_3Al_2(SiO_4)_3$. Autor składa podziękowanie prof. dr A. Smolińskiemu za pomoc przy wykonywaniu tej pracy.

WYKAZ LITERATURY

1. Bertaut F., Forrat F.: *Journal de Physique et le Radium* 17, 1956, 129
2. Betiechtin A.: *Mineralogia*
3. Gilleo M.A., Geller S.: *Physical Review* IV, 1958, V 110.
4. Hogan C.L.: *Ire, Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1958.
5. Johnson A., Rovley J.J.: *P. Ire* V 46, 1958, Nr 7
6. Sekizawa H., Jida S., Miyadai T.: *Jornal of the Physical Society of Japan* V 13, Nr 6, 1958
7. Wadas R.: *Monokryształy ferrytu itrobowego i niklowego*. Publikacja wewnętrzna IPPT PAN, 1961.

ERRATA

Archiwum Elektrotechniki, zeszyt 2/61, tom X

Str.	Wiersz		Jest	Powinno być
	od dołu	od góry		
336		15	$C_{(0, \infty)}(L)$	$C_{(0, \infty)}$
340		2	nie należy	należy
341	wzór 19		a_1, s	$a_1 s$
342	6		a_1, s	$a_1 s$
342	12		nie należy	należącego
342	13		Kx nie należy	Kx należy
342	13		x nie należy do H	x należącego do H
342		1	[9]	[3]
344		11	K_x^*	$K^* x$
344	wzór 27		K_x^*	$K^* x$
345	wzór 28		$k(\tau - t)x(\tau)d\tau$	$k(\tau)x(t + \tau)d\tau$
345	wzór 29		df	df
347		15	y_i nie należą	y_i należą
361	rys. 8		$\left(K(s) = R + sL + \frac{1}{SC}\right)^{-1}$	$K(s) = \left(R + sL + \frac{1}{SC}\right)^{-1}$
361	4		λ nie należy	λ nie należącego
365	wzór 95		$\ K_i\ _H$	$\ K_i\ _H$
471		13	impotrant	important
485	10		te	to
490	3		$R_n = \frac{10^3}{5,68 I_p}$	$R_n = \frac{10^3}{5,68 I_p}$
510		7	F_T	$\mathcal{F}_T$
516		3	$i_{\max} \sim 1/\sqrt{\tau}$	$i_{\max} \sim 1/\sqrt{\tau}$
521	2		$P_z = 20 \text{ mW}$	$P_z = 200 \text{ mW}$
524	5		... pominąć jednorodność ...	... pominąć niejednorodność ...
525	14		... czasie lamp ...	... czasie pracy lamp ...
525	rys. 9, opis krzywej $F_1(t)$		$\ln \frac{n}{n_0} = F_1(t)$	$\ln \frac{n}{n_0} = F_1(t)$
525	rys. 9, przebieg krzywej $F_1(t)$ dla $t \approx 0$		$\ln \frac{n}{n_0} \approx 0$	$\ln \frac{n}{n_0} = 0$
531	wykaz literatury, poz 4		Die Oxdkathode	Die Oxydkathode

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Redakcja przyjmuje artykuły (prace oryginalne) o objętości do 20 stron maszynopisu nie licząc rysunków.
2. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
4. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz w obszerniejsze streszczenia (do 10% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem terminologii w języku obcym.
5. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odpowiadający numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
6. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń, jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
7. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
8. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołań na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
9. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt.
10. Niezastosowanie się Autora do powyższych wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do wymaganej formy.

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki”, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04. Redakcja czynna w poniedziałki, środy i piątki od godz. 17 do 18.

Redakcja zawiadamia P. T. Czytelników, że już od dnia 15 XI 1961 r. można zamawiać prenumeratę czasopisma na rok 1962.

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

„ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI” — KWARTALNIK

Cena w prenumeracie zł 120,— rocznie, zł 60,— półrocznie. Zamówienia i wpłaty przyjmują:

1. Przedsiębiorstwo Upowszechnienia Prasy i Książki „RUCH”, Poznań, ul. Zwierzyniecka 9, konto PKO Nr 122-6-211-831.
2. Urzędy pocztowe i listonosze.
3. Księgarnie „Domu Książki”.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę 40% drożej. Zamówienia dla zagranicy przyjmuje Przedsiębiorstwo Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „RUCH”, Warszawa, ul. Wilcza 46, konto PKO nr 1-6-100.024.

Bieżące numery do nabycia w księgarniach naukowych „Dom Książki” oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk — Wzorcownia Wydawnictw Naukowych PAN — Ossolineum — PWN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter).

*Tylko prenumerata zapewnia regularne
otrzymywanie czasopisma*

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

SPIS TREŚCI

P. Szulkin: Kinematyka elektronów w rezonatorze wnękowym	799
M. Grobelny: Czwórnik selektywny	817
K. Holejko: Wpływ odbić od ziemi na dokładność pomiaru niektórych elektronicznych odległościomierzy geodezyjnych	855
A. Spichalski: Warunki optymalnej czułości mostka niezrównoważonego	877
A. Spichalski: Nieliniowość charakterystyki mostka niezrównoważonego	891
M. Nałęcz: Wykres wektorowy przekładnika prądowego z kompensacją Wilsona	903

СОДЕРЖАНИЕ

П. Шулькин: Кинематика электронов в объемном резонаторе	799
М. Гробельны: Селективные четырехполюсники	817
К. Холейко: Влияние отражений от земли на точность измерения некоторых электронных измерителей геофизических расстояний	855
А. Спихальски: Условия оптимальной чувствительности неуравновешенного моста	877
А. Спихальски: Нелинейность характеристики неуравновешенного моста	891
М. Налеч: Векторная диаграмма трансформатора тока с компенсацией Вильсона	903

CONTENTS — SOMMAIRE

P. Szulkin: Kinematics of electrons in a cavity resonator	799
M. Grobelny: The selective four-pole	817
K. Holejko: The influence of the ground reflection on the accuracy of some electronic distance metres	855
A. Spichalski: Die Bedingungen zur höchsten Empfindlichkeit einer nichtkompensierten Brückenschaltung	877
A. Spichalski: Begriff des Linearitätsfehlers bei geradliniger Interpolation einer nichtkompensierten Brückenschaltung	891
M. Nałęcz: Vector diagram of a current transformer with Wilson compensation	903